

Από το χυθείο μίθωμ.

δου.3 | Ειχαμε από δειξί

$$\lim_{x \rightarrow 1} f^2(x) = 0^v, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g^2(x) = 0^v, \quad f(1) = 0^v, \quad g(1) = 0^v$$

$$f^2(x) = (x^2 - 1)^2 - g^2(x)$$

$$|f(x)| = \sqrt{(x^2 - 1)^2 - g^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{(x^2 - 1)^2 - g^2(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 0^v$$

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0^v \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\underline{-|a| \leq a \leq |a|}$$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 0$$

$$\text{Από κριτήριο αδιόριστου} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\boxed{4} \quad f^5(x) + f(x) = x \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

per $x=0 \rightarrow f^5(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot (f^4(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{f(0)=0} \quad \text{or} \quad f^4(0) + 1 = 0$$

$$f^4(0) = -1 \text{ nono.}$$

$$(1) \Rightarrow f(x) \cdot (f^4(x) + 1) = x, \quad f^4(x) + 1 \neq 0$$

$$f(x) = \frac{x}{f^4(x) + 1} \Rightarrow |f(x)| = \frac{|x|}{f^4(x) + 1} \leq \frac{|x|}{1}$$

At 2 $|f(x)| \leq |x| \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} -|x| \leq f(x) \leq |x| \\ \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ano principio di definizione} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{per } x \neq 0 \\ \text{per } x_0 = 0. \end{array} \right.$$

Again $f(0) = 0$

4

$$f^3(x) + f(x) = x \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Συναρμολογία έκθεση, όπου οι εκδοχές της $f(x)$ είναι περιττοι (1, 3, 5, 7)...

Μ.δ.ο. α) f συνεχής στο $\mathbb{R}$, β) f περιττή.

$$\gamma) f \text{ } \uparrow, \quad \delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \varepsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Μέθοδος
 $f(x) - f(x_0)$

α) Έστω οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$. Μ.δ.ο. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow f^3(x) + f(x) &= x \\ f^3(x_0) + f(x_0) &= x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \frac{|x - x_0|}{|A(x) + 1|} = \frac{|x - x_0|}{A(x) + 1} \\ &\leq \frac{|x - x_0|}{1} \end{aligned}$$

$$f^3(x) - f^3(x_0) + f(x) - f(x_0) = x - x_0 \quad (=)$$

$$(f(x) - f(x_0)) \cdot (f^2(x) + f(x) \cdot f(x_0) + f^2(x_0)) + f(x) - f(x_0) = x - x_0 \quad (=)$$

$$(f(x) - f(x_0)) \cdot (f^2(x) + f(x_0) \cdot f(x) + f^2(x_0) + 1) = x - x_0 \quad (2)$$

$$A(x) \quad \Delta = 1, \quad b = f(x_0), \quad \gamma = f^2(x_0)$$

Σε $A(x)$ εφάρμοζουμε 2^η βαθμιαία ως προς $f(x)$. με $\Delta = f^2(x_0) - 4 \cdot 1 \cdot f^2(x_0) = -3f^2(x_0) \leq 0$

Α $\Delta < 0 \Rightarrow$ το $A(x) > 0$ (ολοκληρωτικό του α) $\forall x \in \mathbb{R}$

Α $\Delta = 0 \Rightarrow f(x_0) = 0 \Rightarrow A(x) = f'(x) \geq 0$

Σε κάθε περίπτωση $A(x) \geq 0$
 $\Rightarrow A(x) + 1 \geq 1 > 0$

4

$$f^3(x) + f(x) = x \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Συναρτησιακή εξίσωση, όπου οι εκδοχές της $f(x)$ είναι περιττές (1, 3, 5, 7)...

Ν.Σ.Ο. α) f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, β) f περιττή.

$$\gamma) f \uparrow, \quad \delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \varepsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

β) Έστω $A(x) = x^3 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$A(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -A(x) \Rightarrow A(x) \text{ περιττή.}$$

Έστω $A(f(x)) = f^3(x) + f(x) \stackrel{(1)}{=} x \Rightarrow A(f(x)) = x.$

$$A(f(-x)) = -x = -A(f(x)) = A(-f(x))$$

$f(-x)$

Ας $A(f(-x)) = A(-f(x)) \stackrel{f: 1-1}{\Rightarrow} A \text{ περιττή.}$

$$f(-x) = -f(x)$$

γ) Θ.Σ.Ο. $A(x) \uparrow$