

Συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $f^3(x) + f(x) = x \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1) f συνεχής στο $\mathbb{R}$. 2) f γνησίως. 3) f : 1-1 4) $f \uparrow$.

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(3) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέλ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2)$

$$\hookrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

(4) Αν $A(x) = x^3 + x$. Θδ.ο. $A(x) \uparrow$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέλ $x_1 < x_2 \Rightarrow$
 $\left. \begin{array}{l} x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow$
 $A(x_1) < A(x_2) \Rightarrow A(x) \uparrow$

$$f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \xrightarrow{(1)} x_1 = x_2 \quad \text{Απλ } f: 1-1$$

Θ.δ.ο. $f(x) \uparrow$. Πράγματι: Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{τέλ } x_1 < x_2 \xrightarrow{(1)} f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$A(f(x_1)) < A(f(x_2)) \xrightarrow{A(x) \uparrow}$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{Απλ } f(x) \uparrow$$

(5) Βήματα.

1) Δείξω ότι $\exists x_0 \in \mathbb{R}$

ώστε $f(x_0) \geq 1$

2) Επειδή $f \uparrow \Rightarrow f(x) > 1$
 $\forall x > x_0$

3) Παράγωγος $\forall a > 1$

$$(\text{γιατί } a^3 > a)$$

Συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $f^3(x) + f(x) = x$ (1) $\forall x \in \mathbb{R}$.

Σκέψου: Αν βάλω $x=2$ $\xrightarrow{(1)}$ $f^3(2) + f(2) = 2$

Ποίαν τιμή λύνω την εξίσωση $y^3 + y = 2$ (2)

$A(x) = x^3 + x \uparrow$ (2) $\Rightarrow A(y) = A(1) \Rightarrow y = 1$ κοινά λύνω

Αρ 2 $f(2) = 1$

$$f^3(10) + f(10) = 10$$

$$A(f(10)) = A(2) \Rightarrow f(10) = 2.$$

2η προσέγγιση
για το 10
Βρίσκω.

2° Βήμα

Για κάθε $x > 2 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(2) \Rightarrow$

$$f(x) > 1$$

Γ.α $x > 2$

3° βήμα $\Rightarrow f^3(x) > f(x)$

1η προσέγγιση

$$f^3(x) + f(x) > 2f(x) \xrightarrow{(1)}$$

$$x > 2 f(x) \pm 1$$

$$f(x) < \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \right.$$

2η προσέγγιση

$$f^3(x) + f(x) > f^3(x) + f(x) \xrightarrow{(1)}$$

$$2f^3(x) > x \Rightarrow f^3(x) > \frac{x}{2}$$

$$\text{για } x > 2 \quad f(x) > \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{2}} = +\infty$$

$$\text{Αρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

5° Βήμα

1) Δείξω ότι $\exists x_0 \in \mathbb{R}$

$$\text{ώστε } f(x_0) \geq 1$$

2) Επειδή $f \uparrow \Rightarrow f(x) > 1$

$$\forall x > x_0$$

3) Παρατηρούμε $\forall a > 1$

$$\text{τοίγ } a^3 > a$$

5) f αριθμ. G_{x_0} $G_{x_0} \rightarrow x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10$$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Αν } \lambda \text{ πληλ-α αριθμ. μονιτ-ατος } \rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 5) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

↑
μονιτ-ατος

ΣΕΛ. 43 G_{x_0} βιβλίου : (α) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$

Αφού f G_{x_0} $G_{x_0} \rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$.

(ii) Αφού f αριθμ.: $f(-1) = -f(1) = -5$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{u \rightarrow 1} f(-u) = \lim_{u \rightarrow 1} [-f(u)] = - \lim_{u \rightarrow 1} f(u) = -5$$

Θέτω $x = -u$
όταν $x \rightarrow -1 \Rightarrow u \rightarrow 1$

Από $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5 \left\{ \begin{array}{l} \text{Αφ } G_{x_0} \text{ } G_{x_0} \rightarrow -1 \\ f(-1) = -5 \end{array} \right.$

iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 5}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-f(x) - 5}{-x - 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(-x) - 5}{-x - 1} \stackrel{\text{Θέτω}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u) - 5}{u - 1} = 10.$$

$$\boxed{6} \quad 1 + 2\sqrt{nx} \leq f(x) \leq 2 + nx \quad (1)$$

$$\text{for } x = \frac{n}{2} \Rightarrow 1 + 2\sqrt{n \cdot \frac{n}{2}} \leq f\left(\frac{n}{2}\right) \leq 2 + n \cdot \frac{n}{2} \Leftrightarrow$$

$$3 \leq f\left(\frac{n}{2}\right) \leq 3 \Rightarrow f\left(\frac{n}{2}\right) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{n}{2}} \left(1 + 2\sqrt{nx} \right) = 1 + 2\sqrt{1} = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ans. kr. 2. n d p e f u b o d n i s} \Rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow \frac{n}{2}} f(x) = 3 \Rightarrow \text{if } Gx \text{ us } Gx \frac{n}{2} \end{array} \right.$$

$$(ii) \quad x \rightarrow \frac{n}{2} \Leftrightarrow x - \frac{n}{2} \rightarrow 0$$

$$\text{Defin } u = x - \frac{n}{2} \Leftrightarrow x = u + \frac{n}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{n}{2}} \frac{Gx^2 x}{f(x) - 3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{Gx^2 \left(\frac{n}{2} + u \right)}{f\left(\frac{n}{2} + u\right) - 3} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(-nu)^2}{f\left(\frac{n}{2} + u\right) - 3} = \lim_{u \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{n^2 u^2}{u^2}}_{A(u)} \cdot \underbrace{\frac{u^2}{f\left(\frac{n}{2} + u\right) - 3}}_{B(u)} \right]$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} B(u) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Gx^{x-1}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$