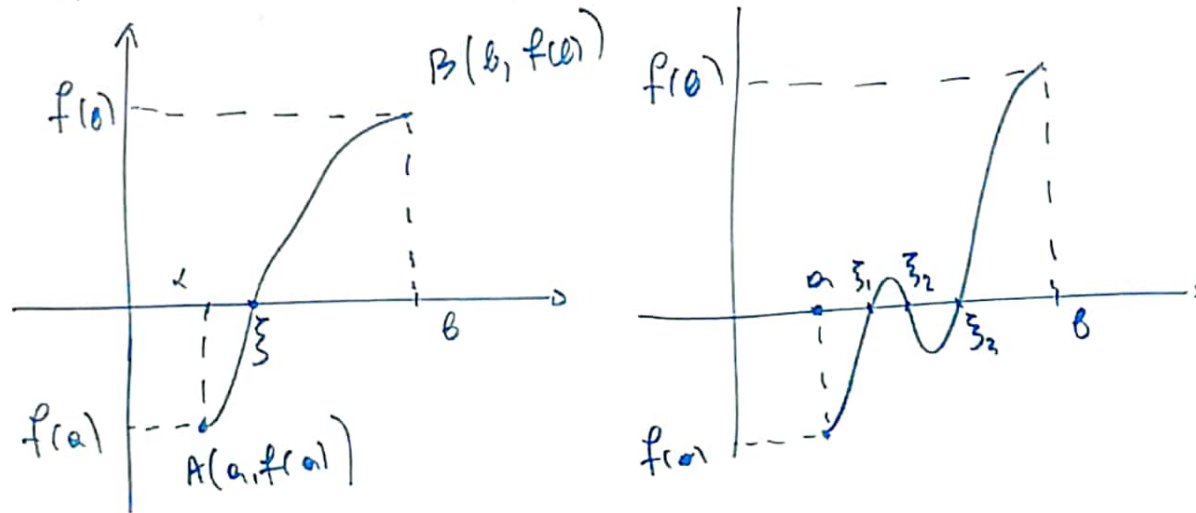


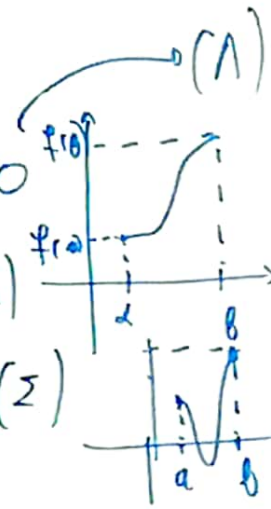
Θεώρημα (Bolzano).

Αν συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ τότε $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$
 $f(a) \cdot f(b) < 0$



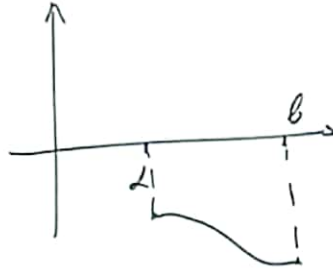
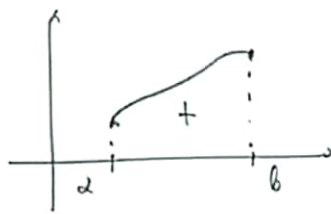
Ερωτήσεις Σ - Α

- 1) Αν f συνεχής στο $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) > 0$ τότε $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$
- 2) Αν $f \rightarrow \rightarrow \rightarrow f(a) \cdot f(b) > 0$ τότε $\nexists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$ (Α)
- 3) $\exists$ συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) > 0$ και $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = 0$ (Σ)
- 4) Αν f συνεχής στο $[a, b]$ και $f(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, τότε $f(a) \cdot f(b) > 0$. (Σ)
- 5) Αν $f(a) \cdot f(b) < 0$ και $f(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, τότε f συνεχής στο $[a, b]$ (Σ)

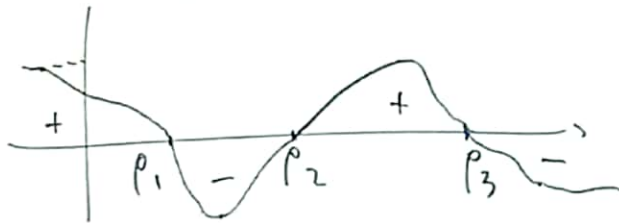


Σχόδιο Βολτανο.

Α. f συνεχής στο $[a, b]$ και $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, τότε διατηρεί πρόσημο στο $[a, b]$. Δηλ. $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ ή $f(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b]$



Α. μια συνεχής f έχει στο πεδίο ορισμού της, το οποίο είναι διάστημα, τότε διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα που χωρίζουν οι διαδοχικές ρίζες της το πεδίο ορισμού της.



Παράδειγμα: Σελ. 75 $f(x) = \eta\mu x - \epsilon\omega x, x \in [0, 2\pi]$

Να βρείτε το πρόσημο της f στο $[0, 2\pi]$.

1ο βήμα: Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - \epsilon\omega x = 0$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \epsilon\omega x \quad (\div) \quad \varphi x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$



Αντί f συνεχής στο $[0, 2\pi] \Rightarrow$

διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα

τα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{4}), (\frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}), (\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi]$

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$x = \frac{\pi}{4}$					
$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$					
$f(x)$	-	0	+	0	-

$$f(0) = 0 - \epsilon\omega 0 = -1. \quad f(\pi) = \eta\mu \pi - \epsilon\omega \pi = 0 - (-1). \quad f(2\pi) = \eta\mu 2\pi - \epsilon\omega 2\pi = 0 - 1 = -1$$

Να λάβει η άσκηση
6η $\eta\mu x - \epsilon\omega x > 0$
στο $[0, 2\pi]$

Ερωτήσεις 5-11.

(6) Αν f έχει ως πεδίο ορισμού A και $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in A$ (1)

τότε f διατηρεί πρόσημο στο A .

Δε. αναφέρει ότι το π.ο. A είναι διάστημα.

π.χ. $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει ως $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, επιπλέον $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

όμως $f(1) = 1$, $f(-1) = -1 \Rightarrow$ δεν διατηρεί πρόσημο.

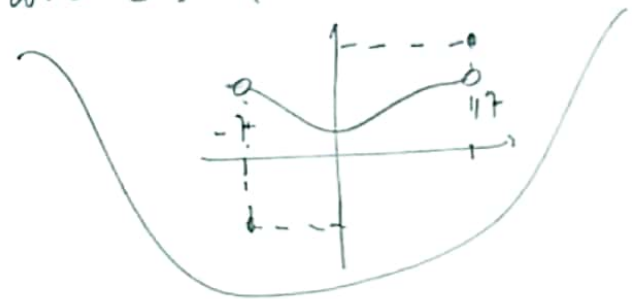
(7) Αν f έχει ως πεδίο ορισμού A και υπάρχουν $a, b \in A$
με $f(a) \cdot f(b) < 0$ τότε $\exists \xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$. (1)

(8) Αν f ορισμένη και έχει ως $A = (-7, 17)$ και $f(-2) \cdot f(12) < 0$.

τότε $\exists \xi \in A = (-7, 17) : f(\xi) = 0$. (2)

(9) Αν f έχει ως $A = (-7, 17)$, $f(-7) \cdot f(17) < 0$ τότε $\exists \xi \in (-7, 17) : f(\xi) = 0$. (1)

ΣΟΣ. Τα γραφικά (γεωμετρικά) δύναται να είναι αληθινά σωστά.



05. Θέωρ. Bolzano - 1

$$x \cdot f(x) - x^4 + n\mu(ax) = x^2 \cdot n\mu\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^* , \quad f(0) = -a \neq 0.$$

i) Θ.δ.ο. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -a.$

(1) $\Leftrightarrow x \cdot f(x) = x^4 - n\mu(ax) + x^2 \cdot n\mu\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \neq 0}$

$$f(x) = x^3 - \frac{n\mu(ax)}{x} + \underbrace{x \cdot n\mu\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{ο.δ.δ.}} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 - a + 0 = -a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n\mu(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \cdot \frac{n\mu(ax)}{ax} \right) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}]{ax=u} \lim_{u \rightarrow 0} \left(a \cdot \frac{n\mu u}{u} \right) = a \cdot 1 = a.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot n\mu \frac{1}{x} \right) = 0$ [Σελ. 52 ΟΧΩ. βιβλίου]. Αρα f έχει ορό 0.

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n\mu(ax)}{x}$
 $\frac{1}{\infty} \cdot n\mu \infty \sim 0 \cdot n\mu \infty$
 $\left| \frac{n\mu(ax)}{x} \right| = \frac{|n\mu(ax)|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|}$

$\infty \cdot n\mu 0$

Τότε $-\frac{1}{|x|} \leq \frac{n\mu(ax)}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ Από κριτήριο σφιγής $\Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n\mu(ax)}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot n\mu \frac{1}{x} \right) \xrightarrow[u \rightarrow 0^+]{x = \frac{1}{u}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{u} \cdot n\mu u \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{n\mu u}{u} = 1.$ Αρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$
 Ομοίως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

05. Θεωρ. Bolzano - 1

$$x \cdot f(x) - x^4 + n\mu(ax) = x^2 \cdot n\mu\left(\frac{1}{x}\right)(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(0) = -a \neq 0.$$

iii) Ανό (ii) $\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \exists$ κομμή στο $+\infty$ με $f(0) > 0$

Αντί $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \rightarrow \exists a \rightarrow$ στο $-\infty$ με $f(a) < 0$.

Αν f συνεχής στο $\mathbb{R} \rightarrow \nexists$ κομμή στο $[a, b]$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ανό Θ. Bolzano} \Rightarrow \\ \text{η εξίσωση } f(x) = 0 \\ \text{έχει 1 μοναδικό ρίζα στο } \mathbb{R} \end{array} \right.$

Στο ενόητο μάθημα: "Ρίζες πολυωνύμων"