

αβλ. 3 / φλλ.

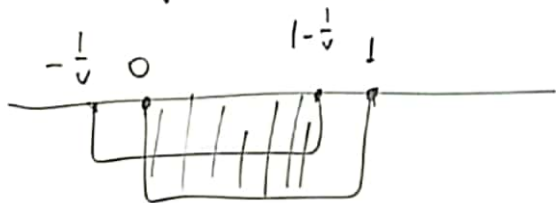
$f_{\text{Kns}} / [0, 1]$

$$f(0) = f(1)$$

$$g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{v})$$

i) Πείραξη

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x + \frac{1}{v} \leq 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{v} \leq x \leq 1 - \frac{1}{v} \end{array}$$



Πεδίο ορισμού $D_g = [0, 1 - \frac{1}{v}]$

$$ii) \quad g(0) = f(0) - f(\frac{1}{v})$$

$$g(\frac{1}{v}) = f(\frac{1}{v}) - f(\frac{2}{v})$$

$$g(\frac{2}{v}) = f(\frac{2}{v}) - f(\frac{3}{v})$$

$$\dots$$

$$g(\frac{v-1}{v}) = f(\frac{v-1}{v}) - f(1) \quad (+)$$

$$g(0) + g(\frac{1}{v}) + \dots + g(\frac{v-1}{v}) = f(0) - f(1) \stackrel{(*)}{=} 0$$

$$(iii) \quad \text{Αρα} \quad g(0) + g(\frac{1}{v}) + \dots + g(\frac{v-1}{v}) = 0$$

$\Rightarrow$ ή όλοι οι όροι είναι 0 ή υπάρχει
ξέλος εξεροχήτων.

- Αν όλοι είναι "0" τότε $g(\frac{1}{v}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{v} \in \rho_1 \cup \rho_2$ ως εξίς.

- Αν $\exists$ ξέλος εξεροχήτων: $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0 \Leftrightarrow$ Αν θ Bolzano $\Rightarrow \exists \rho_1 \cup \rho_2$ ως
 $g(x) = 0$ στο $(x_1, x_2) \subseteq (0, 1)$

abw. 5 / 402.

$$f(x) + g(x) = bx, (1) \quad b \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = (a^2 + 1)x^2 - 2x - 3, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Es sei } f(p_1) = 0 = f(p_2)$$

Da hier
D. Bolzano
von $g(x)$
auf $[p_1, p_2]$

Ano (1) $\Rightarrow$

$$g(x) = bx - f(x)$$

$f(x)$ ist / nicht.

Aber $g(x)$ ist / nicht.

Aber $g(x)$ ist auf $[p_1, p_2]$

	p_1	x_1	p_2	x_2
+		-		+

$$g(p_1) = bp_1 - f(p_1) = bp_1$$

$$g(p_2) = bp_2 - f(p_2) = bp_2$$

$$g(p_1) \cdot g(p_2) = b^2 \cdot p_1 \cdot p_2 \quad (2)$$

$$p_1, p_2 \text{ ist es } b^2 \cdot p_1 \cdot p_2 = 1 \quad P = p_1 \cdot p_2 = \frac{8}{a^2 + 1} = \frac{-3}{a^2 + 1} < 0$$

$$\text{Ano (2)} \rightarrow g(p_1) \cdot g(p_2) \leq 0$$

In der ersten:

$$g(p_1) \cdot g(p_2) = 0 \Rightarrow g(p_1) = 0 \text{ oder } g(p_2) = 0$$

aber mit p_i ist $g(x) = 0$ in p_1
oder p_2

$$\text{2. in der ersten: } g(p_1) \cdot g(p_2) < 0$$

Wäre also D. Bolzano

$\exists p_i$ auf $[p_1, p_2]$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει
 p_i auf $[p_1, p_2]$ mit $g(x) = 0$ auf
 $[p_1, p_2]$

αβλ. - / φβλ.

$$f(a) = g(b) = a$$

$$f(b) = g(a) = b$$

Θεωρεί τη συνάρτηση

$$A(x) = 3f(x) + 4g(x) - 7x$$

Ακριβώς στο $[a, b]$ ως πράξεις ακριβών συναρτήσεων

$$A(a) = 3f(a) + 4g(a) - 7a = 3a + 4b - 7a = -4a + 4b = 4(b-a) > 0$$

όπως $a < b \rightarrow b-a > 0$

$$A(b) = 3f(b) + 4g(b) - 7b = 3b + 4a - 7b = 4a - 4b = 4(a-b) < 0$$

$$\Delta\sigma\lambda\alpha\delta\eta\ \ A(a) \cdot A(b) < 0$$

Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο $[a, b]$ επομένως
υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $A(\xi) = 0$

Έστω f συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < f(b)$. Να δ.ο.

η εξίσωση $f(x) = \frac{3f(a) + 4f(b)}{7}$ έχει λύση στο (a, b)

$$\text{Έστω } A(x) = f(x) - \frac{3f(a) + 4f(b)}{7}$$

$$A(a)$$

$$A(b)$$

αβλ 7/φλλ.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 9 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \text{Έστω}$$

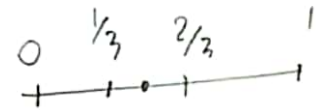
$$A(x) = f(x) + \sqrt{f(x) - 3}$$

$$A(0) = f(0) + \sqrt{f(0) - 3} = -3 < 0$$

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 9 + 3 - 3 = 9 > 0$$

$$A(1) = 1 + 1 - 3 = -1 < 0$$

2 Θ. Bolzano στα $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$



Ερώτηση μεθοδολογικοί χαρακτήρες

Μον λίστα . f είναι στο $\mathbb{R}$.

$$f(0) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

$$f(1) = 5$$

Ερώτηση 1 Από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists \rho_1/2$ στο $\left(0, \frac{2}{3}\right)$

2: $\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \exists \rho_2/2$ στο $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

3: Από τα 2 παραπάνω $\Rightarrow \exists 2 \rho_i/2$ ΟΧΙ
τα διασπείρει καλύτερα

अथ १' प्रवृत्त.

$$(i) \quad P(A) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq P(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in A$$

$$Q(A) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow_{(1)} 0 \leq Q(x) \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$0 \leq P(x) + Q(x) \leq 1 \quad \text{o.e.d.}$$

$$(ii) \quad \text{अथ} \quad A(x) = P(x) + Q(x) - X$$