

Ασκ. 9.] Φυλ. 05. Θέμα: Bolzano

$f(x)$ στο $[0, 5]$

$$x^2 + f^2(x) = 5x \quad (1) \quad \forall x \in (0, 5)$$

i) (1) $\Rightarrow f'(x) = 5x - x^2 \Leftrightarrow$

$$|f(x)| = \sqrt{5x - x^2} \quad (2)$$

Αντίστοιχα έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{5x - x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$5x - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(5 - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 5$$

$$\text{όμως } 0, 5 \notin (0, 5)$$

Αρα $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, 5)$

ii) Επειδή f συνεχής στο $(0, 5)$,
από θεώρημα Bolzano $\Rightarrow$

$f(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(0, 5)$

$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 5)$ ή $f(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 5)$

iii) Αφού $f(1) = -2 \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in (0, 5)$

Από (2) $\rightarrow f(x) = -\sqrt{5x - x^2}, \quad x \in (0, 5)$

Αφού f συνεχής στο $[0, 5] \Rightarrow$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [-\sqrt{5x - x^2}] = 0$$

$$\text{ομοίως } f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \dots = 0$$

$$\text{Αρα } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{όπου } x = 0, \text{ ή } x = 5 \\ -\sqrt{5x - x^2}, & x \in (0, 5) \end{cases} \quad \forall x \in [0, 5]$$

Ασκ. 11] Φυλ. 05. Θέμα: Βολζονο

f έχεις στο $\mathbb{R}$.

$$f(x) \cdot (f(x) + 2e^x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 0.$$

$$f^2(x) + 2e^x \cdot f(x) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) + 2 \cdot f(x) \cdot e^x + e^{2x} = e^{2x} + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\underbrace{(f(x) + e^x)}_{A(x)}^2 = e^{2x} + x^2 \quad (2)}$$

Αντί να εξισώσουμε

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$A^2(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} + x^2 = 0 \text{ αδύνατον}$$

$$\text{διότι } e^{2x} > 0, x^2 \geq 0$$

Αρα $A(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$A(x)$ έχεις (πρόζενς έχεις)

Αντί εξισώσε Βολζονο $\Rightarrow$

in $A(x)$ διασπείν πρόβλημα.

$$A(0) = f(0) + e^0 = 0 + 1 = 1 > 0$$

Αρα $A(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Αντί (2)} \Rightarrow |f(x) + e^x| = \sqrt{e^{2x} + x^2} \Rightarrow$$

$$f(x) + e^x = \sqrt{e^{2x} + x^2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = -e^x + \sqrt{e^{2x} + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ΑΓΚ. 13 | Φυλ. 05. Θέμα Βολζονο

$$(i) \frac{k^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0 \quad (1) \quad k, \lambda, \mu \neq 0$$

Η εξίσωση
ορίζεται για
 $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \cancel{x} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot \frac{k^2}{\cancel{x}} + x \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x+1)} \cdot \frac{\lambda^2}{\cancel{x+1}} + x \cdot \cancel{(x-1)} \cdot (x+1) \cdot \frac{\mu^2}{\cancel{x-1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) + \lambda^2 x \cdot (x-1) + x \cdot (x+1) \cdot \mu^2 = 0$$

$$A(x) = k^2(x+1)(x-1) + \lambda^2 x(x-1) + x(x+1)\mu^2$$

Επιλέγοντας $A(x)$ έχουμε για $[-1, 0], [0, 1]$
ως πολυώνυμο.
από θ. Βολζονο $\Rightarrow$ έχει $x_1 \in (-1, 0),$
 $x_2 \in (0, 1)$ ρίζες (κατά Χριστό).

$$A(-1) = \lambda^2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2\lambda^2 > 0$$

$$A(0) = -k^2 < 0$$

$$A(1) = 1 \cdot 2 \cdot \mu^2 = 2\mu^2 > 0$$

αφού $x_1, x_2 \neq -1, 0, 1 \Rightarrow$ οι ρίζες
αυτές είναι και ρίζες της εξίσωσης (1).

Αυτές οι ρίζες είναι μοναδικές, διότι το $A(x)$ πολυώνυμο 2ου βαθμού $\Rightarrow$
δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 2 ρίζες.

Ασκ. 13 | Φυλ. 05. Θεωρ. Bolzano

$$(ii) \text{ Η } A(x) = k^2 \cdot (x^2 - 1) + \lambda^2 \cdot (x^2 - x) + \mu^2 \cdot (x^2 + x) = \underbrace{k^2 x^2 - k^2}_{k^2 x^2 - k^2} + \underbrace{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 x}_{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 x} + \underbrace{\mu^2 x^2 + \mu^2 x}_{\mu^2 x^2 + \mu^2 x} \\ = (k^2 + \lambda^2 + \mu^2) \cdot x^2 + (-\lambda^2 + \mu^2) \cdot x - k^2 = 0.$$

Από τους νόμους Vieta έχουμε $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-\lambda^2 + \mu^2}{k^2 + \lambda^2 + \mu^2} = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{k^2 + \lambda^2 + \mu^2}$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a} = \frac{-k^2}{k^2 + \lambda^2 + \mu^2}$$

$$\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{k^2 + \lambda^2 + \mu^2}}{\frac{-k^2}{k^2 + \lambda^2 + \mu^2}} = -\frac{\lambda^2 - \mu^2}{k^2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{k^2} \quad \text{o. ε. δ.}$$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Αν f είναι σε $[a, b]$ και $f(a) \neq f(b)$, τότε για κάθε $\eta \in (f(a), f(b))$ ή $\eta \in (f(b), f(a)) \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = \eta$.

Αποδ. Έστω συνάρτηση $A(x) = f(x) - \eta$. $A(x)$ είναι σε $[a, b]$ οπότε έχουμε

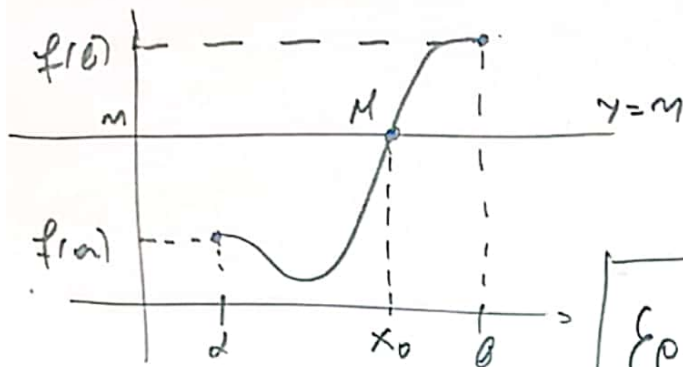
Έστω $f(a) < f(b)$

τότε $f(a) < \eta < f(b)$

$$\begin{aligned} A(a) &= f(a) - \eta < 0 \\ A(b) &= f(b) - \eta > 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Από Θ. Bolzano} \Rightarrow \\ \exists x_0 \in (a, b) : \end{array} \right.$$

$$A(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta.$$

Γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Ε.Τ.



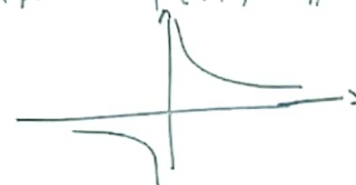
Το Θ.Ε.Τ. μας λέει ότι η ευθεία $y = \eta$ τέμνει την f τουλάχιστον σε ένα σημείο $M(x_0, \eta)$ με $x_0 \in (a, b)$.

Ερωτήσεις Σ-1.

1) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_2} f(x) = +\infty, \quad \text{τότε το σύνολο τιμών } f(A) = \mathbb{R}. \quad (A)$$

Παράδειγμα: $f(x) = \frac{1}{x}$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.



2) Αν f ορίζεται στο (a, b) και συνεχής, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$
τότε $f((a, b)) = \mathbb{R}$. (Σ)

Θεώρημα: Αν f συνεχής και $\uparrow$ στο (a, b) και $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

τότε το σύνολο τιμών είναι $f((a, b)) = (A, B)$

Αν f συνεχής και $\downarrow$ στο (a, b) τότε $f((a, b)) = (B, A)$

Αν f συνεχής και $\uparrow$ στο $[a, b]$ τότε $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

Απόδ. του (2). Θα θεωρήσω ως διακριτικό $y \in \mathbb{R}$.

Θ. δ.ο. $y \in f(A)$.

Έστω η συνάρτηση $A(x) = f(x) - y$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} A(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (f(x) - y) = -\infty, \Rightarrow \exists x_1 \text{ κοντά στο } a^+ : A(x_1) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} (f(x) - y) = +\infty \rightarrow \exists x_2 \text{ κοντά στο } b^- : A(x_2) > 0$$

Η $A(x)$ έχει στο $[x_1, x_2] \Rightarrow$ από θ. Bolzano $\rightarrow$

$$\exists x_0 : A(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y \Leftrightarrow y \in f(A)$$