

Αν f συνεχής στο $[a, b]$ και $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$

τότε το σύνολο τιμών είναι $f(A) = \mathbb{R}$. (2).

Φύλλο ΟΓ/ΘΕΤ-ΘΜΕΤ.-ΣΤ.

Λεμ. 1 Έστω $f(a) < f(b)$

Από f συνεχής στο $[a, b]$,
από ΘΜΕΤ. υπάρχουν δ και ϵ τέτοια
ότι $\delta > 0$. Δηλ.

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} m \leq f(a) \leq M \Rightarrow 3m \leq 3f(a) \leq 3M \\ m \leq f(b) \leq M \Rightarrow 5m \leq 5f(b) \leq 5M \end{array} \right.$$

$$8m \leq 3f(a) + 5f(b) \leq 8M$$

$$f(x_1) = m \leq \frac{3f(a) + 5f(b)}{8} \leq M = f(x_2) \quad (1)$$

Αν ισχύει το "=" στο (1) τότε θα είναι $f(a) = f(b) = m$
οπότε το "=" στο (1) ισχύει για όλα τα x .

Από Θ.Ε.Τ. $\Rightarrow$

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$$

$$\text{και } f(x_0) = \frac{3f(a) + 5f(b)}{8}$$

Άσκ. 3. Με αναγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι $n \neq 0$ και n είναι άρτιο.

$$n^3 - 0^3$$

οπότε $\exists x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$f(x_1) = a, \quad f(x_2) = b, \quad a \neq b.$$

Αρα f είναι στο $[x_1, x_2]$, από Ο.Ε.Τ.

Θα πάρουμε όμως τις τιμές των $[a, b]$

οπότε τον δευαδικό. Άρα.

Αρα f είναι άρτιο.

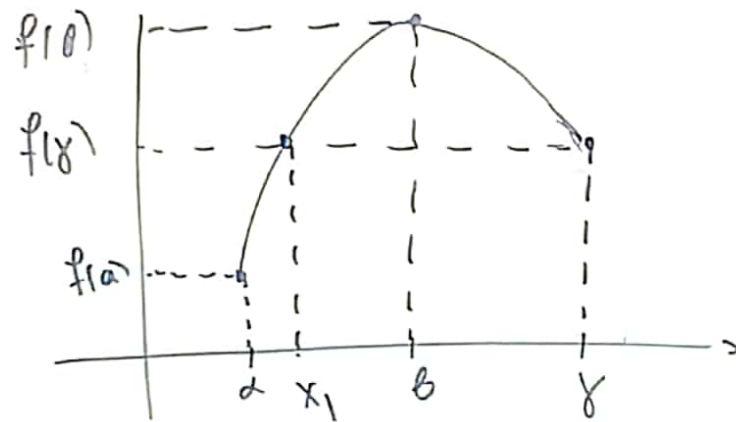
Άσκ. 4 $f^3(x) - 3f(x) + 2 = 0 \iff (f(x)-1) \cdot (f^2(x) + f(x) - 2) = 0 \iff$
 $(f(x)-1) \cdot (f(x)-1) \cdot (f(x)+2) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Οι μοναδικές τιμές που μπορεί να πάρει n f είναι 1 ή -2. Αν $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = -2$ από Ο.Ε.Τ. $\implies \exists x_3 \in (x_1, x_2)$ ισχύει $f(x_3) = -1$ Άρα

Αρα $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Πρόβ. 5 $a < b < \gamma \Rightarrow f(a) < f(\gamma) < f(b)$



Αφού $f(a) \neq f(b)$
 και f συνεχής στο $[a, b]$
 και $f(a) < f(\gamma) < f(b)$.

Από ΘΕΤ. $\Rightarrow \exists x_1 \in (a, b)$ ώστε
 $f(x_1) = f(\gamma)$ $\Rightarrow f$ α-1-1
 όπως $x_1 \neq \gamma$

Διάγραμμα Χριστιανός: Έχω ξίφος: α f γρ. μονότονο $\Rightarrow f$: 1-1

Εάν αριστερά να διελκυσθεί το αριστερό, α m f συνεχ.