Διαγώνισμα 2023

Θέμα Α

Α3 Σ – Σ – Λ – Λ

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

$$0$$

$$\left|x \cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|$$

$$-|x| \le x \cdot \eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$$

Θέμα Β

$x \cdot f(x) - 4x^3 + x + \eta\mu x = 0 \quad (1)$ f συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$x \cdot f(x) = 4x^3 - x - \eta\mu x \overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$f(x) = 4x^2 - 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, \quad x \neq 0.$$

Άρα συνεχής στο 0 ⟹

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(4x^2 - 1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) =$$

$$= 0 - 1 - 1 = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1 - \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ -2, & x = 0 \end{cases}$$

B2

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(4x^2 - 1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to -\infty}\left(4x^2 - 1\right) = +\infty$$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$$

Άρα $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Longleftrightarrow$

$$-\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$$

$$0$$

Από κριτήριο παρεμβολής ⟹ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

$\boxed{B_3}$ Αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists\, x_1$ κοντά στο $-\infty$ ώστε $f(x_1) > 0$

$f(0) = -2 \Rightarrow f(x_1)\cdot f(0) = < 0$

Επίσης f συνεχής στο $[x_1, 0] \Rightarrow$ Θ. Bolzano $\exists\, x_0 \in (x_1, 0) \subseteq (-\infty, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$

$\boxed{B_4}$ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) - 4x^2}{\sqrt{f(x)} + 2x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{4x^2} - 1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \cancel{4x^2}}{\sqrt{f(x)} + 2x} = 0$

Διότι $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$. $\lim_{x\to+\infty}$ (αριθμ.) $= -1$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. $\lim_{x\to+\infty}$ παρονομ. $= +\infty$

Θέμα Γ

$\boxed{Γ_1}$ $e^{f(x)} + f(x) - x = 1 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$(1) \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \quad (2)$

Έστω $A(x) = e^x + x$. Έστω $x_1 < x_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^{x_1} < e^{x_2} \\ x_1 < x_2 \end{array}\right\} \rightarrow e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2$

$A(x_1) < A(x_2)$

$A(x) \uparrow$

Έστω $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$$e^{f(x_1)} + f(x_1) < e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$A(f(x_1)) < A(f(x_2)) \overset{A(x)\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \rightarrow f \uparrow \Rightarrow 1-1$$

Για να βρω την αντίστροφη θέτω $f(x) = y$ και λύνω ως προς x.

$$e^y + y - x = 1 \Leftrightarrow e^y + y - 1 = x \Rightarrow f^{-1}(y) = e^y + y - 1 \ , \ y \in \mathbb{R}$$

λόγω $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(x) = e^x + x - 1$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$\boxed{Γ_2}$ $\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} f^{-1}(x) = -\infty$

$\boxed{Γ_3}$ παρατηρώ $f^{-1}(0) = e^0 + 0 - 1 = 0$

Αφού $f \uparrow$: Για $x > 0 \Rightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(0) = 0$

Για $x < 0 \Rightarrow f^{-1}(x) < 0$

		0	
$f^{-1}(x)$	$-$	0	$+$