

Θέμα Δ περβωί

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + \frac{7}{2}, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + a, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x \cdot f(x)$$

$\Delta 1$ $(AB \cap D) = S \Leftrightarrow$

$$\frac{B+b}{2} \cdot v = S \Leftrightarrow$$

$$\frac{|g(4)| + |g(2)|}{2} \cdot 2 = S \Leftrightarrow$$

$$g(4) + g(2) = S \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot f(4) + 2 \cdot f(2) = S \Leftrightarrow$$

$$4\left(\frac{1}{4} + a\right) + 2\left(\frac{1}{2} + a\right) = S \Leftrightarrow$$

$$1 + 4a + 1 + 2a = S \Leftrightarrow$$

$$6a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$\Delta 2$

Για $x < 1$ ή για $x > 1$

η f έχει (πλάτος ή παράγει έχει)

Για $x = 1$ θα εξετάσω αν είναι

έχει με τον ορισμό:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x^2 - 3x + \frac{7}{2} \right) = 1 - 3 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f \text{ έχει στο } 1 \Rightarrow \text{έχει στο } \mathbb{R}$$

Για να παραλείψω απόδειξη

Για $x < 1$ είναι πρώτο με $a = 1 \Rightarrow$ παραβίαση

$$\text{ελέγχω αν υπάρχει } x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 1} = -\frac{3}{2} \notin (-\infty, 1)$$

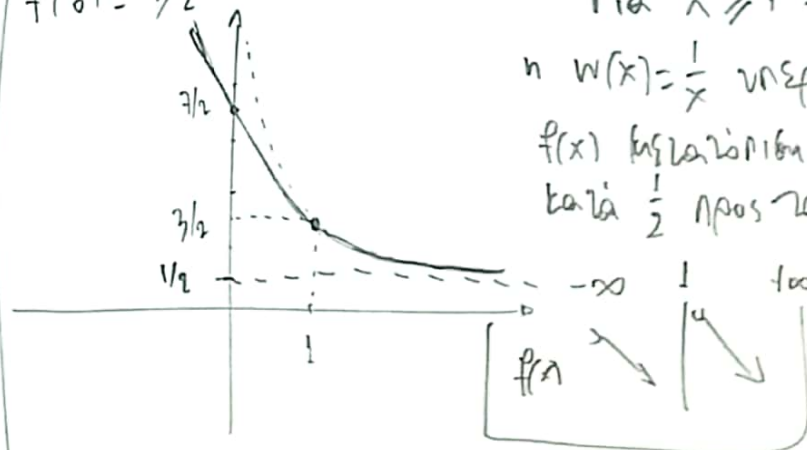
$$f(0) = \frac{7}{2}$$

$$\text{Για } x \geq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$$

$$\text{η } w(x) = \frac{1}{x} \text{ υπερβαίνει } \rightarrow$$

$$f(x) \text{ κυλιόμαστε με } w(x)$$

$$\text{κατά } \frac{1}{2} \text{ προς τα πάνω}$$



Θέμα Δ περβω

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + \frac{7}{2}, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$\Delta 3$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(e^x)] = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0} (u^2 - 3u + \frac{7}{2}) = \frac{7}{2}$

Θέτω $u = e^x$ όταν $x \rightarrow -\infty$

τότε $u \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(e^x)] = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow \frac{1}{2}} (u^2 - 3u + \frac{7}{2}) = \dots$$

Θέτω $f(x) = u$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$\Delta 4$ $h(x) = -\frac{3}{x}, x \in [1, +\infty)$

Λίγω μου εξισώσω $h(x) = y$ ως προς x
 $-\frac{3}{x} = y \Leftrightarrow -3 = x \cdot y$ αν $y = 0$ τότε
 η εξίσωση γίνεται $-3 = 0$ άτοπο. Άρα $y \neq 0$
 $\Rightarrow x = \frac{-3}{y} \quad h'(y) = -\frac{3}{y^2}$

Για να διαδοιμήσω ως h έχω
 h οχως στο $[1, +\infty)$. $h(1) = -3$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$. Επibus h $\uparrow$ στο $[1, +\infty)$
 $\Rightarrow h(A) = [h(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)] = [-3, 0)$

Αρδ

$$h'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad x \in [-3, 0)$$

Η εξίσωση:

$$f(x) = h'(x) + \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

το π.ο. ms εξισώσωσ άρα: $D_f \cap D_{h'}^{-1} = [-3, 0)$

$$x^2 - 3x + \frac{7}{2} = -\frac{3}{x} + \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x \cdot x^2 - 2x \cdot 3x + 2x \cdot \frac{7}{2} = 2x \cdot (-\frac{3}{x}) + 2x \cdot \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x^3 - 6x^2 + 7x = -6 + 9x \Leftrightarrow$$

$$2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

$$x^2 \cdot (x-3) - (x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=3, x=1, x=-1 \text{ (σημ.)}$$

Θέμα Γ

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

(Γ₄) $e^{f(2x+1)} - e^{f(3x-2)} = 3 - x$

$$2x+1 = 3x-2 \Leftrightarrow$$

$$2x - 3x = -3$$

$$-x = -3$$

$$\boxed{x=3}$$

Παρά $x=3$ $e^{f(2 \cdot 3 + 1)} - e^{f(3 \cdot 3 - 2)} = 3 - 3 \Leftrightarrow$

$$e^{f(7)} - e^{f(7)} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Άρα $x=3$ είναι η μόνη λύση εξίσωσης.

$$f(x^2) + f(x) = x^4 - x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = ; \quad f(1) = ;$$

Παρά $x=0$ $f(0^2) + f(0) = 0^4 - 0$

$$2f(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=0}, \quad x=1$$

Παρά $x=1 \Rightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{f(1) = 0}$

Να λύσει την εξίσωση $\boxed{f(x) = 0}$ Ανάμεσα $x=0, x=1$

$$e^{f(x)} + f(x) = x+1 \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = -f(x) + 1$$

$$e^{f(2x+1)} - e^{f(3x-2)} = 3-x$$

$$D_f = \mathbb{R}. \quad \left. \begin{array}{l} 2x+1 \in \mathbb{R} \\ 3x-2 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{n.o.} \\ \{ \text{16 values} \} \\ \mathbb{R} \end{array}$$

$$e^{f(2x+1)} - (2x+1) + (2x+1) - e^{f(3x-2)} + (3x-2) - (3x-2) = 3-x$$

$$-f(2x+1) + 1 + 2x+1 + f(3x-2) - 1 - 3x+2 = 3-x \Leftrightarrow$$

$$-f(2x+1) + f(3x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(3x-2) = f(2x+1) \Leftrightarrow$$

$$3x - 2x = 2+1$$

$$x = 3 \quad \text{Answer}$$