

Ασκ. 6 / Σε λ. 152

$$f(x) = (x-a)^2 (x-b)^2 (x-\gamma)^2, \quad a < b < \gamma$$

Μα δ.ο. έχει 3 σημεία τοπικών ελαχίστων και 2 σημεία τοπ. μεγίστων.

Λύση] $f'(x) = 2(x-a) \cdot (x-b)^2 (x-\gamma)^2 + 2(x-a)^2 (x-b) \cdot (x-\gamma)^2 + 2(x-a)^2 (x-b)^2 (x-\gamma)$
 $= 2(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-\gamma) \underbrace{\left[(x-b)(x-\gamma) + (x-a)(x-\gamma) + (x-a)(x-b) \right]}_{A(x)}$

Λίγω πιο εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x=a, \quad x=b, \quad x=\gamma$$

$$\left. \begin{aligned} A(a) &= (a-b)(a-\gamma) > 0 \\ A(b) &= (b-a)(b-\gamma) < 0 \\ A(\gamma) &= (\gamma-a)(\gamma-b) > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{Από Θ. Bolzano} &\Rightarrow \exists x_1 \in (a, b) \text{ p.t.} \\ &\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \exists x_2 \in (b, \gamma) \Rightarrow \end{aligned}$$

$A(x)$ η συνάρτηση των βαθμίδων $\Rightarrow$
όχι, αλλά από 2 p.t.s

x -a a x₁ b x₂ γ το

x-a	-	0	+	+	+	+	+
x-b	-	-	-	0	+	+	+
x-γ	-	-	-	-	-	0	+
A(x)	+	+	0	-	-	0	+
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↗

T.E T.M T.E T.M T.E ο.ε.δ.

2ος τρόπος

$$f(x) = (x-a)^2 \cdot (x-b)^2 \cdot (x-\gamma)^2$$

Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(a) = f(b) = f(\gamma) = 0$$

Με x ∈ [a, b] υπάρχουν 3 σημεία όπου f(x) = 0

Η f έχει 6 ρίζες στο [a, b], άρα 0 ∈ M.

⇒ ∃ x₁ ∈ (a, b) όπου f(x₁) = 0

Από 0. Fermat ⇒ f'(x₁) = 0

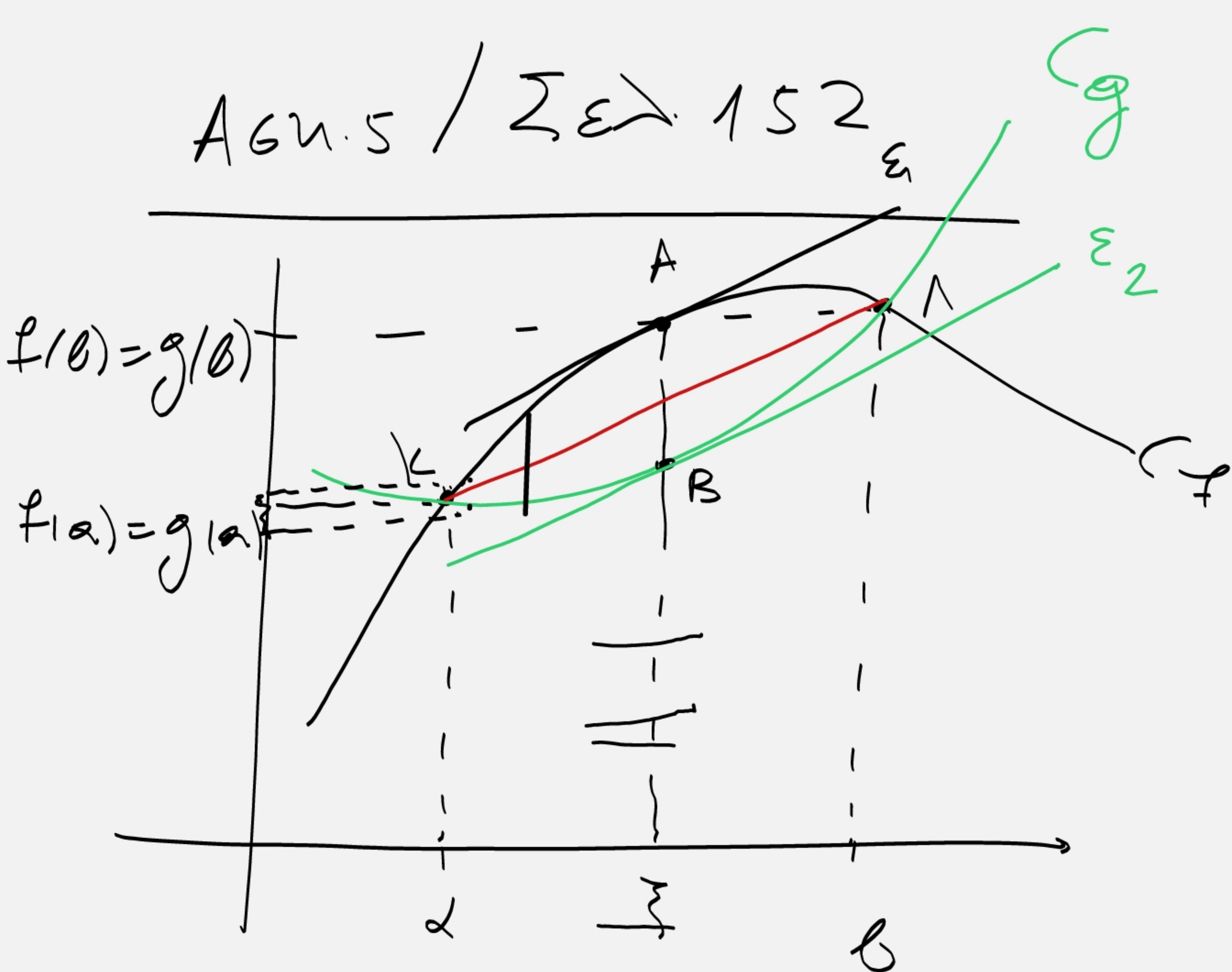
Η f έχει 6 ρίζες στο [b, γ] ⇒ άρα 0 ∈ M ⇒ ∃ x₂ ∈ (b, γ) όπου f(x₂) = 0

Εν συνεχεία από 0. Fermat ⇒ f'(a) = f'(b) = f'(γ) = 0

Αυτή η συνάρτηση έχει 6 ρίζες, άρα 0 ∈ M. Από 0. Fermat f'(x₃) = 0 ⇒ 6 ρίζες της f'

όπως f' ακολουθεί 5 αλφάβητος σημεία αλλαγής ⇒ Α7010 ⇒ 5 αλφάβητος σημεία αλλαγής.

Agus / ΣΕΔ 152



Θεωρείς τα παραπάνω

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

$$d(a) = 0 \quad \left| \quad \text{Γιατί } d(x) \geq 0, x \in [a, b]$$

$$d(b) = 0 \quad \left| \quad \begin{array}{l} d(x) \text{ είναι } 0 \text{ σε } [a, b] \\ d(x) \text{ είναι } 0 \text{ σε } (a, b) \end{array} \right.$$

$$d(a) = d(b)$$

Από το Rolle $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) :$

$$d'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f'(\xi) - g'(\xi)} = 0 \text{ o.s.s.}$$

2^{ος} ρόλος Για $\exists \xi \in (a, b) : d'(\xi) = 0$

αποδείξει, ή όχι, $\exists \xi \in (a, b) : d'(\xi) = 0$

$d(x)$ είναι 0 σε $x = \xi$

Από το Fermat $\Rightarrow d'(\xi) = 0 \dots$