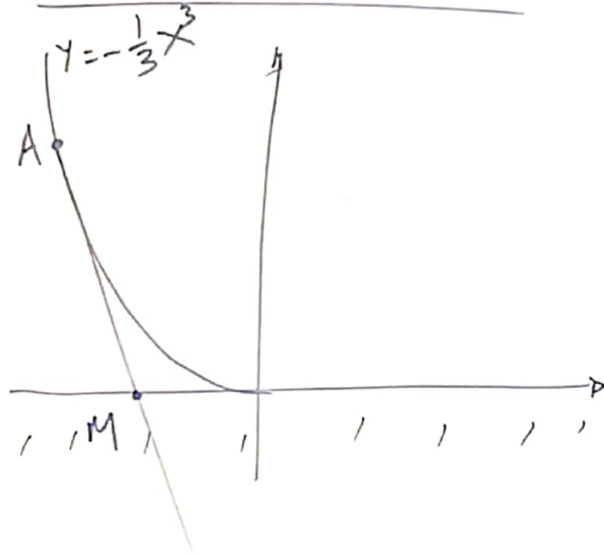


αβυβ / Σεα. 127



Συμβολισμός:

Έστω $\mu(t)$ η ταχύτητα του σημείου Μ
 τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Ζητάμε το $\mu'(t_0)$.

$$f'(x) = -x^2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο
 σημείο $A(a, -\frac{1}{3}a^3)$ είναι:

$$y - (-\frac{1}{3}a^3) = -a^2 \cdot (x - a)$$

$$A(a(t), -\frac{1}{3}a^3(t))$$

$$a'(t) = -a(t)$$

$$a(t_0) = -3$$

Για να βρω την ταχύτητα του σημείου Μ

$$\text{βάζω } y = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}a^3 = -a^2 \cdot (x - a) \xrightarrow{a \neq 0}$$

$$\frac{1}{3}a = -x + a \Rightarrow x = a - \frac{1}{3}a \Rightarrow x = \frac{2}{3}a.$$

$$\text{Άρα } \mu(t) = \frac{2}{3}a(t) \rightarrow \mu'(t) = \frac{2}{3}a'(t) = -\frac{2}{3}a(t)$$

$$\mu'(t_0) = -\frac{2}{3}a(t_0) = -\frac{2}{3} \cdot (-3) = 2 \text{ m/s}$$

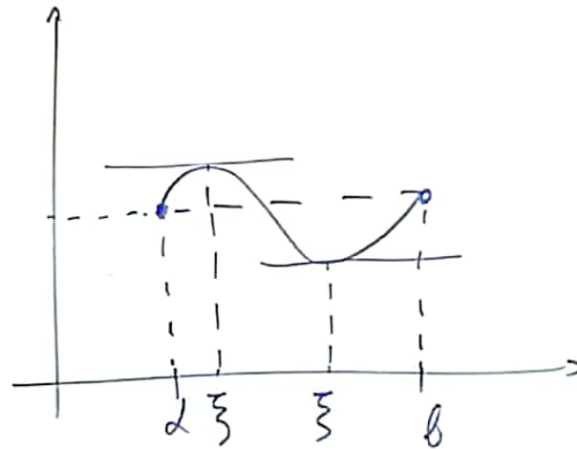
Θεώρημα Rolle: Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$,

f παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b)$, τότε

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

$$f(b) = f(a)$$

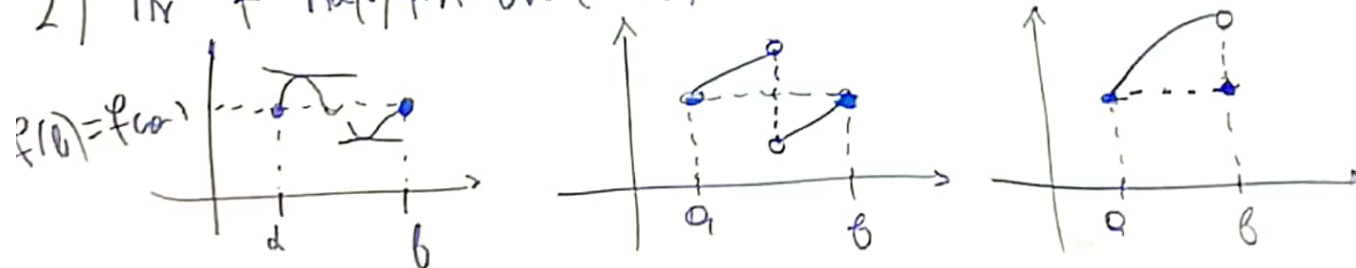


Το Θ. Rolle γεωμετρικά λέει ότι υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στο άξονα $x'x$. Το ξ είναι η ζητούμενη ρίζα της

Ερωτήσεως Σ.1.

1) Αν f παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $f(a) = f(b)$ τότε $\exists \xi \in [a, b] :$
 $f'(\xi) = 0$. (Σ)

2) Αν f παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b)$ τότε $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$ (Λ)

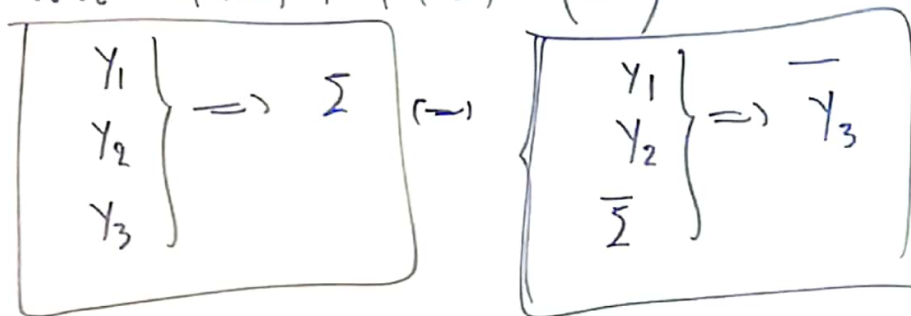


3) Αν f παραμν στο (a, b) , $f(a) = f(b)$, τότε $\exists \xi \in (a, b)$:
 $f'(\xi) = 0$. (1)

4) Υπάρχει συνάρτηση f παραμν στο (a, b) , $f(a) = f(b)$
 και $\forall \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$. (2)

5) $\exists$ συνάρτηση f συνεχ στο $[a, b]$, f παραμν στο (a, b) ,
 $f(a) = f(b)$ και $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ (1)

6) Αν f συνεχ στο $[a, b]$, f παραμν στο (a, b) και $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
 τότε $f(a) \neq f(b)$ (2)



Αντιστοιχισμοί προτάσεων.

Aufg. 1 / Prüfung 09. 0. Rolle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 + bx^2 + 2x + \gamma, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Prüfung: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \boxed{1 = \gamma}$

Prüfung: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad (1)$

- Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (x + a)}{x} = a$

- Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + bx^2 + 2x + \gamma - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + bx + 2)}{x} = 2$

Anso (1) $\Rightarrow \boxed{a = 2}$. Prüfung: $f(-1) = f(1) \Rightarrow (-1)^2 + a(-1) + 1 = 1^3 + b + 2 + \gamma$

$1 - a + 1 = 1 + b + 2 + \gamma \Rightarrow 1 - 2 + 1 = 1 + b + 2 + 1 \Rightarrow 0 = b + 4 \Rightarrow \boxed{b = -4}$

Aufg. 1 / Prüfung 09. 0. Rolle

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 - 4x^2 + 2x + 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 3x^2 - 8x + 2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Nun nur eigenen

$$f'(x) = 0, \quad x \in (-1, 0)$$

$$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = -1 \text{ da } \text{no.}$$

$$f'(x) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

$$3x^2 - 8x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 64 - 24 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{6} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3} \rightarrow \frac{4 - \sqrt{10}}{3} \leftarrow x_0$$