

AGU. 17

0.8.0. m $\varepsilon \xi$ i G u G n

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} \quad (1) \quad \text{EXERCISE}$$

Ges (a, b)

$$\text{f\u00fcr } A(x) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{x}$$

$$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{x} \quad (\Rightarrow)$$

$$\left(\frac{f(x) \cdot g(x)}{x} \right)' = \frac{f(x) \cdot g(x)}{x} \quad (\Rightarrow)$$

$$\left(\frac{f(x) \cdot g(x)}{x} \right) \cdot x - f(x) \cdot g(x) \cdot x' = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\left(\frac{f(x) \cdot g(x)}{x} \right) = 0 \quad (2)$$

$\heartsuit$ $A(x)$ G\u00fclt G u $[a, b]$

n\u00e4 G u G u u f\u00fcr $x \neq 0$ G u $[a, b]$

$\heartsuit$ $A(x)$ n\u00e4 p/h u G u (a, b)

$$\heartsuit A(a) = \frac{f(a) \cdot g(a)}{a} = 0$$

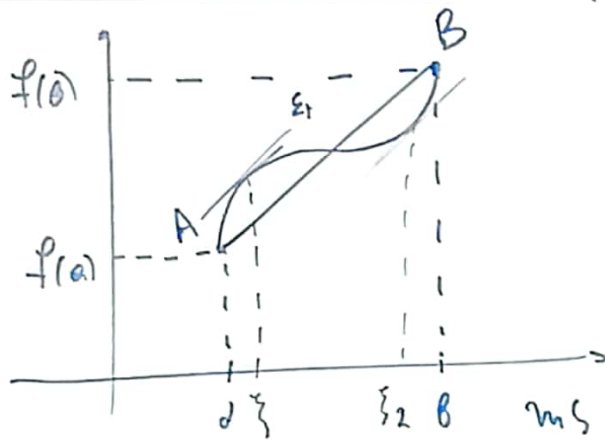
$$A(b) = \frac{f(b) \cdot g(b)}{b} = 0$$

Ano 0. Rolle $\Rightarrow \exists \xi \in]a, b[$ (2) $\Rightarrow$ (1)

der a n\u00e4 p/h u G u u (1) der f\u00fcr $\xi \in]a, b[$

Θ.Μ.Τ. Αν f συνεχώς στο $[a, b]$ $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \exists \xi \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \\ f \text{ παραγωγίσιμη στο } (a, b) \end{array} \right.$

Γεωμετρική ερμηνεία



$$\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$f'(\xi) = 0$ σημαίνει διεύθυνσης της εφαπτομένης με C_f στο $M(\xi, f(\xi))$

το Θ.Μ.Τ. μας λέει ότι υπάρχει εφαπτομένη με C_f παράλληλη στην ευθεία AB .

Για την απόδειξη: Θ.Ι.Ο. έγκειται στην εξίσωση:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \Leftrightarrow f(b) - f(a) - (b - a) \cdot f'(x) = 0 \quad (*)$$

$$\left[\left[f(b) - f(a) \right] \cdot x \right]' - (b - a) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(f(b) - f(a))x - (b - a)f(x) \right]' = 0$$

Έστω η συνάρτηση $A(x) = (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x) + \text{const.}$

Λόγος: Έστω $f(x) = ax^2 + bx + c$ με $x \in [k, \lambda]$

i) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[k, \lambda]$.

ii) Να δείξετε, αν υπάρχει, $\xi \in (k, \lambda)$: $f'(\xi) = \frac{f(\lambda) - f(k)}{\lambda - k}$

i) $\heartsuit$ f συνεχ στο $[k, \lambda]$ πολυωνυμικός } Ισχύουν οι υποθέσεις
 $\heartsuit$ $f'(x) = 2ax + b$, $x \in (k, \lambda)$ } του Θ.Μ.Τ.

$$\text{ii)} \quad \frac{f(\lambda) - f(k)}{\lambda - k} = \frac{a\lambda^2 + b\lambda + c - ak^2 - bk - c}{\lambda - k} = \frac{a(\lambda^2 - k^2) + b(\lambda - k)}{\lambda - k} =$$

$$\frac{a(\lambda - k)(\lambda + k) + b(\lambda - k)}{\lambda - k} = a(\lambda + k) + b.$$

$$f'(\xi) = 2a\xi + b. \quad \text{Ζητάω } \xi: \quad 2a\xi + b = a(\lambda + k) + b \quad (=)$$

$$\xi = \frac{a(\lambda + k)}{2a} = \frac{\lambda + k}{2} \quad \text{προφανώς} \quad k < \frac{\lambda + k}{2} < \lambda$$

Φ02. 10. ΘΜΤ- ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

① (α) $|n\mu a - n\mu b| \leq |a - b|. (1)$

Αν $a = b$. τότε η (1) ισχύει ως $0 = 0$

Αν $a < b$. (1) $\Leftrightarrow \left| \frac{n\mu a - n\mu b}{a - b} \right| \leq 1 (2)$

Έστω $A(x) = n\mu x$. Αν ο θ.μ.τ. $\rightarrow \exists \xi \in (a, b)$:

$\heartsuit A(x) \text{ συνεχ. στο } [a, b], \left| \frac{n\mu a - n\mu b}{a - b} = n\mu \xi \rightarrow \left| \frac{n\mu a - n\mu b}{a - b} \right| = |n\mu \xi| \leq 1$

$\heartsuit A'(x) = n\mu x \text{ στο } (a, b)$

Από ισχύει η (2) $\Rightarrow$ (1)

Αν $a > b$, ομοίως.

(β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (n\mu \sqrt{x+1} - n\mu \sqrt{x}) = ?$ Αν ο (α) επεκταθεί

Έχουμε $|n\mu \sqrt{x+1} - n\mu \sqrt{x}| \leq |\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| (3)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

(3) $\Rightarrow -|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| \leq n\mu \sqrt{x+1} - n\mu \sqrt{x} \leq |\sqrt{x+1} - \sqrt{x}|$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Από κριτήριο ορίσματος} = 1 \dots \end{array} \right.$

$\rightarrow 0 \leftarrow$

ex. 2 (a) $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \quad (1) \quad \forall x > 0$

Ex. $A(t) = \ln t$
 $\heartsuit A(t)$ GMS on $[x, x+1]$.
 $\heartsuit A'(t) = \frac{1}{t}$ on $(x, x+1)$

Ans. G.M.T. $\Rightarrow \exists \xi \in (x, x+1):$

$$\frac{A(x+1) - A(x)}{x+1 - x} = \frac{1}{\xi} \quad (2)$$

Ex. $0 < x < \xi < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \quad (3)$

(2), (3) $\Rightarrow \frac{1}{x+1} < A(x+1) - A(x) < \frac{1}{x}$ o.e.d.

(b) $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1)) = +\infty$

Ex. $x=1$ $\ln 2 - \ln 1 < 1$
 $x=2$ $\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$
 $x=3$ $\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3}$
 $\dots$
 $x=v$ $\ln(v+1) - \ln v < \frac{1}{v}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1)) = +\infty$

Or $f(x) < g(x) \quad \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\ln(v+1) < \ln v$