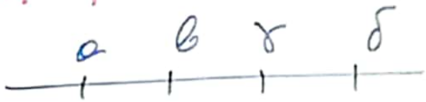
άσκ.4

$\alpha<\beta<\gamma<\delta$ $\quad f(\alpha)+f(\delta)=f(\beta)+f(\gamma)$, $\quad \alpha+\delta=\beta+\gamma$

1) Δίνεται σχέση μεταξύ μεμονωμένων τιμών της f

2) Ζητείται >> της f' ή f''



$$f(\alpha)+f(\delta)=f(\beta)+f(\gamma) \Leftrightarrow$$

$$f(\delta)-f(\gamma)=f(\beta)-f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \quad (1)}$$

$\alpha+\delta=\beta+\gamma$

$\delta-\gamma=\beta-\alpha$

♡ f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists\, \xi_1\in(\alpha,\beta): f'(\xi_1)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

♡ f παρ/μη στο (α,β) ομοίως $\Rightarrow \exists\, \xi_2\in(\gamma,\delta): f'(\xi_2)=\dfrac{f(\delta)-f(\gamma)}{\delta-\gamma}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. Από Θ.Rolle για την f' στο $[\xi_1,\xi_2]$

$\Rightarrow \exists\, x_0\in(\xi_1,\xi_2): f''(x_0)=0$.

Άσκ.6 / Σ.132 $\quad f$ συνεχής στο $[-1,1]$

$f'(x) \le 1 \quad \forall x \in (-1,1)$, $f(-1)=-1$, $f(1)=1$. ΝΔΟ $f(0)=0$

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi_1 \in (-1,0): \dfrac{f(0)-f(-1)}{0+1} = f'(\xi_1) \Leftrightarrow f(0)+1 = f'(\xi_1)$

$\Rightarrow \quad \exists\, \xi_2 \in (0,1): \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\xi_2) \Leftrightarrow 1-f(0) = f'(\xi_2)$

Αφού $f'(x) \le 1 \quad \forall x \in (-1,1) \Rightarrow f'(\xi_1) \le 1 \Leftrightarrow f(0)+1 \le 1 \Leftrightarrow f(0) \le 0$

και $f'(\xi_2) \le 1 \Leftrightarrow$

$1-f(0) \le 1 \Leftrightarrow -f(0) \le 0 \Leftrightarrow f(0) \ge 0 \Rightarrow f(0)=0$

Ερώτηση εκτός βιβλίου: Ν.Δ.Ο. $f(x)=x \quad \forall x \in [-1,1]$

Έστω τυχαίο $x \in (-1,1)$.

Από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists\, \xi_1 \in (-1,x): \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = f'(\xi_1) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)+1}{x+1} = f'(\xi_1)$

Αφού $f'(\xi_1) \le 1 \Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{x+1} \le 1 \xRightarrow{x+1>0} f(x)+1 \le x+1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) \le x \quad (1)}$

Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi_2 \in (x,1): \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(\xi_2) \le 1 \Rightarrow \dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \le 1 \Leftrightarrow 1-f(x) \le 1-x$

$\Leftrightarrow -f(x) \le -x \Leftrightarrow \boxed{f(x) \ge x \quad (2)}$

Scanned with CamScanner

Άσκ. 8

$$a \quad \xi_1 \quad \frac{a+b}{2} \quad \xi_2 \quad b$$

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right) : \dfrac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = f'(\xi_1)$

» » $\Rightarrow \exists\, \xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right) : \dfrac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}} = f'(\xi_2)$

Αφού $\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow$

$$\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} < \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) < f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) < f(a) + f(b) \quad \text{ο.ε.δ.}$$