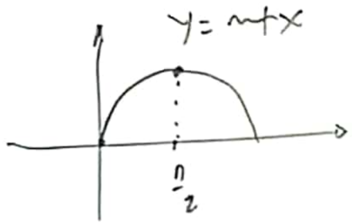
Ασκ.9 | $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

$$\frac{\beta-\alpha}{\eta\mu^2\beta} < \sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta < \frac{\beta-\alpha}{\eta\mu^2\alpha} \quad (1) \quad \overset{\beta-\alpha>0}{\Longleftrightarrow}$$



$$\frac{1}{\eta\mu^2\beta} < \frac{\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta}{\beta-\alpha} < \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{\eta\mu^2\beta} > \frac{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}{\beta-\alpha} > -\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} \Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < \frac{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}{\beta-\alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \quad (2)}$$

Έστω $f(x)=\sigma\varphi x$. ♡ f συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο ορίζεται η $\sigma\varphi x$

♡ f παρ/μη στο (α,β). $f'(x)=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$: $\frac{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}{\beta-\alpha}=f'(\xi)=-\frac{1}{\eta\mu^2\xi}$ (3)

$$\alpha<\xi<\beta \underset{\text{στο }[0,\frac{\pi}{2}]}{\overset{\eta\mu x\uparrow}{\Longleftrightarrow}} \eta\mu\alpha<\eta\mu\xi<\eta\mu\beta \underset{[0,\frac{\pi}{2}]}{\overset{\eta\mu x>0}{\Longleftrightarrow}} \eta\mu^2\alpha<\eta\mu^2\xi<\eta\mu^2\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2\alpha}>\frac{1}{\eta\mu^2\xi}>\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\xi} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta} \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} -\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} < \frac{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}{\beta-\alpha} < -\frac{1}{\eta\mu^2\beta}$$ δηλ. ισχύει η (2)

που $(2)\Leftrightarrow(1)$ ο.ε.δ.

Ασκ.3 - Α'ομ / Σ.131 / Σχολικό.

μορφή $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

ii) Αν $0<\alpha<\beta$, ν.δ.ο. $\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}$

Έστω $f(x)=\ln x$.

♡ f συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq(0,+\infty)$

♡ $f'(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(\alpha,\beta)$

Από Θ.Μ.Τ. $\Rightarrow \exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$:

$$\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}=f'(\xi)=\frac{1}{\xi} \quad (1)$$

$$0<\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{\alpha} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}$$

Άλλη προσέγγιση: $f'(x)=\frac{1}{x}$. $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0 \Rightarrow f'(x)\downarrow$ στο $(0,+\infty)$

$$\alpha<\xi<\beta \Rightarrow f'(\alpha)>f'(\xi)>f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\beta)<f'(\xi)<f'(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\beta}<\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha}.$$

Άσκηση: Ν.δ.ο. $\ln x\leq x-1$ (1) $\forall x>0$

$\Leftrightarrow \ln x-\ln 1\leq x-1$

1η) Αν $x>1 \Rightarrow$ $\boxed{\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}<1 \ (2)}$

Έστω $f(t)=\ln t$

♡ f συνεχής στο $[1,x]\subseteq(0,+\infty)$

♡ $f'(t)=\frac{1}{t}$ στο $(1,x)$.

Από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists\,\xi\in(1,x)$: $f'(\xi)=\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}$ (3)

$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}$. $1<\xi<x \Leftrightarrow 1>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{x} \Leftrightarrow 1>\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}$ δηλ. ισχύει η (2)

Ασκ. 10 $\quad f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$.

δ) Θ.δ.ο. η εξίσωση

$f(x)-\alpha-\beta+x=0$ (1) έχει λύση

Έστω $A(x)=f(x)-\alpha-\beta+x$. ♡ $A(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ πράξεις συνεχ.

♡ $A(\alpha)=f(\alpha)-\cancel{\alpha}-\beta+\cancel{\alpha}=\alpha-\beta<0$
$A(\beta)=f(\beta)-\alpha-\cancel{\beta}+\cancel{\beta}=\beta-\alpha>0$ $\Big\}\Rightarrow A(\alpha)\cdot A(\beta)<0$. Από Θ. Bolzano $\Rightarrow$

$\exists x_0\in(\alpha,\beta): A(x_0)=0 \Leftrightarrow$ έχει λύση η (1) ο.ε.δ.

(ε) Σκέψη: Θ.δ.ο. $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$

Από ΘΜΤ $\Rightarrow \exists x_1\in(\alpha,x_0)$: $\dfrac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha}=f'(x_1)\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{\alpha}+\beta-x_0-\cancel{\alpha}}{x_0-\alpha}=f'(x_1)$ (1)

Από Θ.Μ.Τ $\Rightarrow \exists x_2\in(x_0,\beta)$: $\dfrac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}=f'(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{\beta}-\alpha-\cancel{\beta}+x_0}{\beta-x_0}=f'(x_2)$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\dfrac{\beta-x_0}{x_0-\alpha}\cdot\dfrac{x_0-\alpha}{\beta-x_0}=1$. ο.ε.δ.