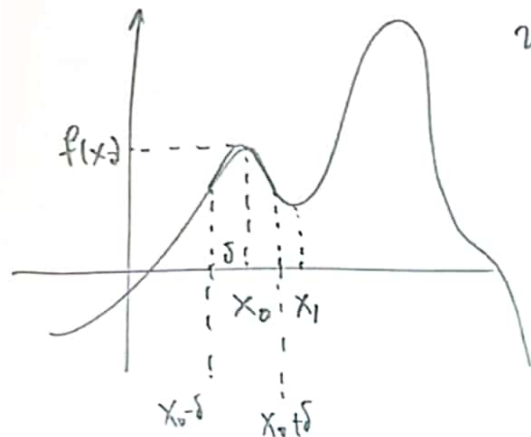


Ορισμός

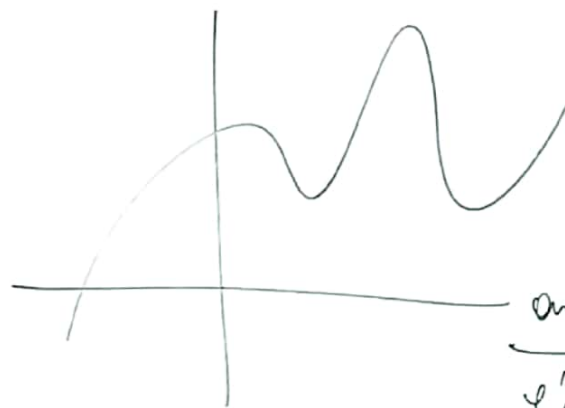


Λέμε ότι μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει
τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A \iff \exists \delta > 0$ ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Λέμε ότι η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει στο x_1 τοπικό ελάχιστο

$$\iff f(x) \geq f(x_1) \quad \forall x \in A \cap (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$$



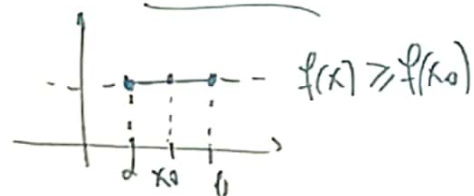
Θεώρημα (Fermat): Αν f είναι παρ/κη στο x_0
στο οποίο παρουσιάζει ακρότατο και x_0 εσωτερικό
σημείο διαστήματος, τότε $f'(x_0) = 0$

Η συνθήκη " x_0 εσωτερικό σημείο διαστήματος" είναι
αναγκαία. Π.χ. $f(x) = x^2$, $x \in [1, +\infty) = A$
 $f'(x) = 2x > 0 \quad \forall x > 1 \Rightarrow f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ Αν $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \rightarrow f(1)$ ελάχιστο ms f στο A .

$$f'(x) = 2x. \quad f'(1) = 2 \neq 0$$

Πιθανές είδη απροσώτων: 1) $f'(x) = 0$



2) Ακρα διαστήματος

3) f δεν παρουσιάζει

Ερωτ. Το αντίστροφο του Θεωρ.
16.1.1) Δηλ. Αν $f'(x_0) = 0$
 x_0 εσωτερικό σημείο διαστήματος
τότε x_0 είναι ακρότατο;
Ανθρ. Όχι. π.χ. $f(x) = x^3$
 $f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0$

Ερωτ. Αν $f'(x_0) = 0$, x_0 ΕΓΩΛΕΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ διαστήματος του

Π.Ο. της f . τότε x_0 είναι ΟΞΗ ακρόαση;

Ανωτ. οχι. διηρηματ. $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$

Αντι β' Ακρίων ξίεω ότι $f(x) = x^3$ η στο $\mathbb{R}$

$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+
$f(x)$		

Αθ.5 / Α'ΟΜ Σελ.150

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + 1$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$$

-1, 1 ΕΓΩΛΕΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ διαστήματος του Π.Ο.

f ηδρ/ηη στο -1, 1, και f ηαπαρίσχει ακρόαση
στο -1, 1, τότε από το Θ. Fermat $\Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3a + 2b - 3 = 0 \\ 3a - 2b - 3 = 0 \end{array} \xrightarrow{(+)} \begin{array}{l} 6a - 6 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ b = 0 \end{array}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Αντι μερ ξίεωσων

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				
	T.M.		T.G.	

ηδ βρείτε το εύρος ημίνης f .

$$A = \underbrace{(-\infty, -1]}_{A_1} \cup \underbrace{(-1, 1)}_{A_2} \cup \underbrace{[1, +\infty)}_{A_3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad f(-1) = 3,$$

f η στο $(-\infty, -1]$, f η στο A_1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 + 3 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f(A_2) = (-1, 3)$$

$$f(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$f(A_3) = [-1, +\infty)$$

Άλλο ερώτημα.

Να βρείτε το άνω άκρο π/ύου
της εξίσωσης $f(x) = 3$.

Λύση:

$$3 \in f(A_1) \Rightarrow \exists x_1 \in A_1 : f(x_1) = 3$$

Για άρα στο A_1 η $f \uparrow$ — άρα είναι

$$3 \notin f(A_2) \quad \text{οκ.}$$

$$3 \in f(A_3) \Rightarrow \dots \text{άρα και π/ύα}$$

Φύλλο: Ακρόαση - Fermat

Ασκ. 1 $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, f $\mathbb{R}/\mu\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy \quad (1)$$

(i) Παραγωγίζω την (1) ως προς x

$$f'(x+y) \cdot (x+y)' = f'(x) + 4y \Rightarrow$$

$$f'(x+y) = f'(x) + 4y$$

Για $x=0 \Rightarrow f'(y) = f'(0) + 4y$

Για $y=0 \Rightarrow f'(x) = f'(x)$

(1) $\Rightarrow x=y=0 \Rightarrow \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + \cancel{f(0)} \Leftrightarrow$
 $\boxed{f(0)=0}$

Έχουμε $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Από τον ορισμό $x_1=0$ η f $\mathbb{R}/\mu\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ είναι

f $\mathbb{R}/\mu\mathbb{R}$ στο $x_1=0$, και ο ελαστικός ορισμός διασφαλίσει

$\Rightarrow$ Από 9. Fermat $\Rightarrow$

$$f'(0)=0.$$

(ii)

$$f'(y) = 4y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x^2 + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

Από $f(0)=0$

$$2 \cdot 0^2 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Από } f(x) = 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$