Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, που η παράγωγός της <u>δεν</u> είναι συνεχής.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

$$\left(x^2 ημ\frac{1}{x}\right)' = 2x\cdot ημ\frac{1}{x} + x^2\cdot συν\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2x\cdot ημ\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\cdot συν\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 2x ημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}} ημ\frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0}\left(x\cdot ημ\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f'(0)=0$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases} 2xημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(συν\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to +\infty}(συν u) = \text{δεν υπάρχει}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2xημ\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$A(x)=\frac{|x|}{x}, \quad B(x) = 1-\frac{|x|}{x}$$

Αν $\lim A(x) = \ell_1$, $\nexists \lim B(x)$

τότε $\nexists \lim\left(A(x)+B(x)\right)$

Απαγωγή σε άτοπο: $\exists \lim_{x\to x_0}\left(A(x)+B(x)\right)$

τότε $\lim_{x\to x_0}\left[\underbrace{\left(A(x)+B(x)\right)-A(x)}\right] = \lim_{x\to x_0}\left(A(x)+B(x)\right) - \lim_{x\to x_0}A(x) = \ell$.

$B(x) \Rightarrow \lim B(x)$ υπάρχει. Άτοπο ασκ.5 / Φυλλαδιο 07.

α) $3P(x) = 2\left(P'(x)\right)^2$ (1)

Έστω $\text{βαθ}P(x) = \nu \Rightarrow \text{βαθ}P'(x) = \nu - 1 \Rightarrow \text{βαθ}\left(P'(x)\right)^2 = 2\nu - 2$

$\text{βαθ}\left(3P(x)\right) = \nu$

$(1) \Rightarrow \text{βαθ}\left[3P(x)\right] = \text{βαθ}\left[2\left(P'(x)\right)^2\right] \Leftrightarrow$

$\nu = 2\nu - 2 \Leftrightarrow 2 = 2\nu - \nu \Leftrightarrow \nu = 2$

Άρα $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. $P'(x) = 2ax + b$.

$\left(P'(x)\right)^2 = (2ax + b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$.

$(1) \Leftrightarrow 3\cdot(ax^2 + bx + \gamma) = 2\cdot\left(4a^2x^2 + 4abx + b^2\right) \Leftrightarrow$

$3ax^2 + 3bx + 3\gamma = 8a^2x^2 + 8abx + 2b^2$

$8a^2 = 3a$ και $8ab = 3b$ και $2b^2 = 3\gamma \Leftrightarrow$

$8a^2 - 3a = 0 \Leftrightarrow$

$a\cdot(8a - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$a = 0$ ή $a = \frac{3}{8}$

απορ

$8\cdot\frac{3}{8}\cdot b = 3b \Leftrightarrow$

$3b = 3b \Leftrightarrow$

$b \in \mathbb{R}$

$\gamma = \frac{2\cdot b^2}{3}$

Άρα $\boxed{P(x) = \frac{3}{8}x^2 + bx + \frac{2\cdot b^2}{3}, \ b \in \mathbb{R}}$

Scanned with CamScanner

σελ.5 / Φυλλάδιο 07.

(β) $\text{βαθ}P(x) = \nu$

$\text{βαθ}\,P'(x) = \nu - 1$

$\text{βαθ}\left(P'(x)\right)^2 = 2\nu - 2$

$\text{βαθ}\,P''(x) = \nu - 2$

$\text{βαθ}\left[\left(P'(x)\right)^2 \cdot P''(x)\right] = 2\nu - 2 + \nu - 2 = 3\nu - 4$

$\left.\begin{array}{l} \text{βαθ}\,A(x) = \mu \\ \text{βαθ}\,B(x) = \nu \end{array}\right\} \text{βαθ}\left(A(x)\cdot B(x)\right) = \mu + \nu$

Άρα αφού $P(x) = \left(P'(x)\right)^2 \cdot P''(x) \Rightarrow$

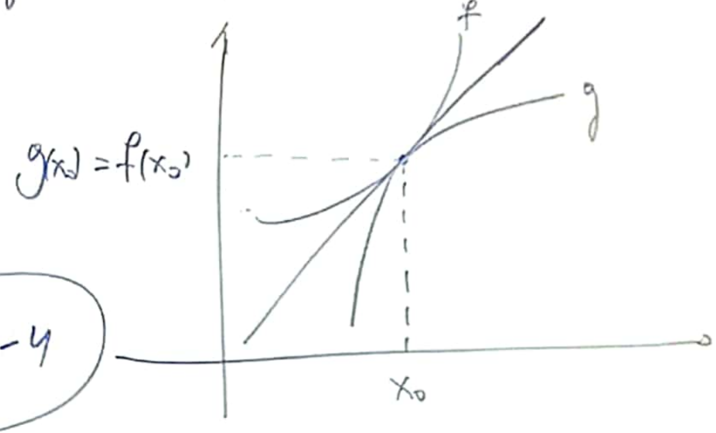
$\nu = 3\nu - 4 \Leftrightarrow$

$4 = 3\nu - \nu \Leftrightarrow 4 = 2\nu$

$\nu = 2$

Από Β' Λυκείου:

Ένα σημείο και ο συντελεστής δ/νσης είναι ικανά για να προσδιορίσουν μια ευθεία



$\left\{\begin{array}{l} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{array}\right\}$

άσκ. 3 - Β' ομ / Σελ. 122 / Σχολικό

$f(x) = ax^2 + bx + 2, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$

$\left.\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) = g'(1) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \quad f'(x) = 2ax + b, \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$\left.\begin{cases} 2a \cdot 1 + b = -\frac{1}{1^2} \\ a + b + 2 = 1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases}$

Ασκ. 4 Σ. 122 $\quad f(x) = e^x, \quad g(x) = -x^2 - x, \quad C_f \quad A(0,1) \quad . \quad f'(x) = e^x$

$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = e^0 \cdot x \Leftrightarrow \boxed{y = x + 1}$

πρέπει να υπάρχει x_0 ώστε $y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$

$\boxed{y = g'(x_0) \cdot x - x_0 \cdot g'(x_0) + g(x_0)}$ [Μορφή $y = ax + b$]

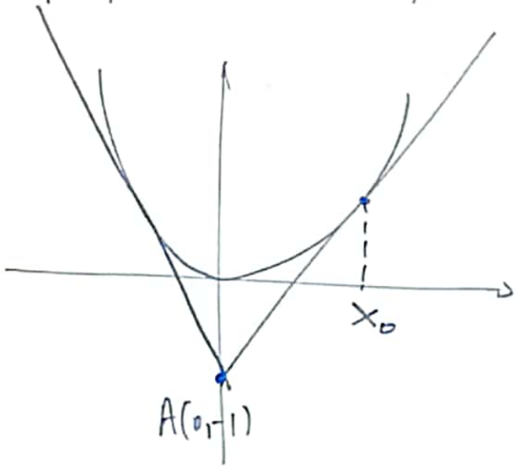
$g'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 - 1 = 1 \Leftrightarrow -2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = -1$

Scanned with CamScanner

Ασκ.10 / Σελ. 121 / Σχολικό

$f(x)=x^2$. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης η οποία διέρχεται από το $A(0,-1)$. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

$f(0)=0^2=0 \neq -1$



$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, $A \in$ Εφαπτομένη

$-1-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0) \Rightarrow$

$x_0 f'(x_0)-f(x_0)=1$

$x_0 \cdot 2x_0 - x_0^2 = 1 \Rightarrow$

$2x_0^2 - x_0^2 = 1 \Rightarrow$

$x_0^2 = 1$

$x_0 = \pm 1$

$x_0 = 1 \Rightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1)\ \ldots$

$x_0 = -1 \Rightarrow y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$

ασκ. 20 / φυλλάδιο. 08

$f(x) = ax^2 - x + 2$ $\quad A(3, 34)$, $\quad g(x) = x^3 - x + 10.$

Πρέπει $f(3) = 34 \Leftrightarrow$

$a \cdot 3^2 - 3 + 2 = 34 \Leftrightarrow$

$9a - 1 = 34 \Leftrightarrow$

$9a = 35 \Leftrightarrow$

$\boxed{a = \frac{35}{9}}$

$f(x) = \frac{35}{9}x^2 - x + 2$

$f'(x) = \frac{70}{9}x - 1$

$f'(3) = \frac{70}{9} \cdot 3 - 1 = \frac{70}{3} - 1 = \frac{67}{3}.$

$f(3) = 34$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο Α της C_f

$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$

$y - 34 = \frac{67}{3} \cdot x - 67 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{67}{3}x - 33}$