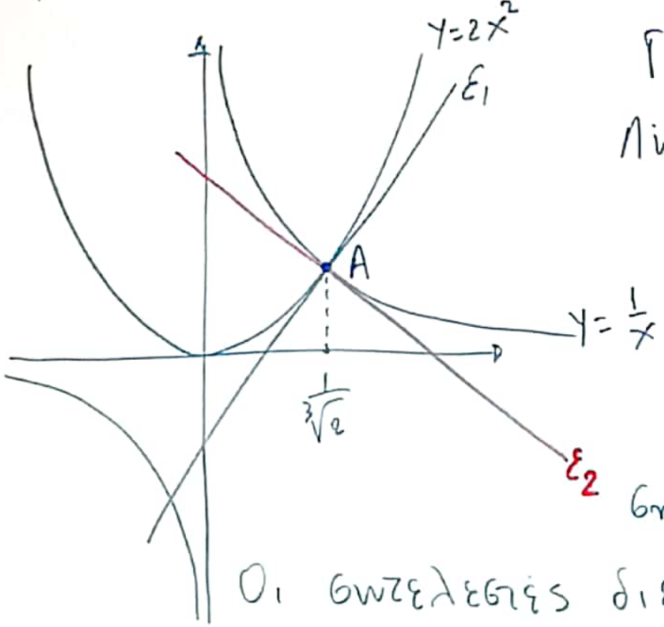
Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας ω που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=2x^2,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$, στο κοινό τους σημείο.



Για να βρω τα κοινά σημεία:

Λύνω την εξίσωση $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2x^2=\frac{1}{x} \overset{x\in\mathbb{R}^*}{\Leftrightarrow}$

$$2x^3=1 \Leftrightarrow x^3=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

$g\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\sqrt[3]{2}$. Άρα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το $A\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right)$

Οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων είναι:

$$\lambda_{\varepsilon_1}=f'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

$f'(x)=4x \quad \vec{\delta}_1=\left(1, \frac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)$

$$\lambda_{\varepsilon_2}=g'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2}=-\frac{\sqrt[3]{2}^2}{1}=-\sqrt[3]{4}$$

$g'(x)=-\frac{1}{x^2} \quad \vec{\delta}_2=\left(1, -\sqrt[3]{4}\right)$

1) $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}$

2) Αν $\vec{\delta}_1=(x_1,y_1)$, $\vec{\delta}_2=(x_2,y_2)$, $\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2=x_1x_2+y_1y_2$

3) $\vec{\delta}_1=(x_1,y_1)$, $|\vec{\delta}_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

4) $\vec{\delta}_1=(x_1,y_1)$, $\lambda_{\vec{\delta}_1}=\frac{y_1}{x_1}$

5) Να βρείτε ένα που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ

Απ. $\vec{\delta}=(1,\lambda)$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|} = \dots$$

$$\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2} = 1 - \frac{4}{\cancel{\sqrt[3]{2}}}\cdot\sqrt[3]{2^2} = 1 - 4\sqrt[3]{2}$$

$$|\vec{\delta_1}| = \sqrt{1^2 + \frac{4^2}{\sqrt[3]{2}^2}} = \sqrt{1 + \frac{16}{\sqrt[3]{2^2}}}, \quad |\vec{\delta_2}| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt[3]{4}^2\right)}$$

ασκ. 9 / Σελ. 122

ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, $D_f = \mathbb{R}$.

$$\sqrt[3]{x^4} = |x|^{4/3} = \begin{cases} x^{4/3}, & x \geq 0 \\ (-x)^{4/3}, & x < 0 \end{cases}$$

Αν $x>0$ $f'(x) = \left(x^{4/3}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

Αν $x<0$. $f'(x) = \left[(-x)^{4/3}\right]' = \frac{4}{3}\cdot(-x)^{\frac{1}{3}}\cdot(-x)' =$

$= -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{4/3}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/3} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-(-x)^{4/3}}{-x} = -\lim_{x\to 0^-}(-x)^{1/3} = 0$$

$f'(0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, & x<0 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Κανόνες De L'Hospital.

1) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Παραδείγματα:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x-1}{2x} = \dfrac{3-4-1}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

αριθμ. $1^3-2\cdot 1^2-1+2 = 1-2-1+2 = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\eta\mu x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\eta\mu x}{2x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-(\eta\mu x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sigma\upsilon\nu x}{2} = -\dfrac{1}{2}$