$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x - x}{x^3} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot(x)'}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot 1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$\boxed{\text{σελ. 7 / Σ. 122}}$

$\boxed{f'(a)\in\mathbb{R}}$

(i) $$\lim_{x\to a}\frac{x\cdot f(x)-a\cdot f(a)}{x-a} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to a}\frac{(x\cdot f(x))'}{1} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)+x\cdot f'(x)}{1} =$$

$$= f(a)+a\cdot f'(a).$$

$$\lim_{x\to a} \frac{x\cdot f(x) - a\cdot f(a)}{x-a} =$$

1) Βλέπω ότι $\frac{0}{0}$

2) $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{x\cdot f(x) - x\cdot f(a)}{x-a} + \frac{x\cdot f(a) - a\cdot f(a)}{x-a}\right] =$$

$$\left.\lim_{x\to a} x\cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a}\left(f(a)\cdot \frac{\cancel{x-a}}{\cancel{x-a}}\right)\right] = a\cdot f'(a) + f(a)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{x\cdot f(x) - a\cdot f(x)}{x-a} + \frac{a\cdot f(x) - a\cdot f(a)}{x-a}\right] \dots$$

ii) $$\lim_{x\to a} \frac{e^x\cdot f(x) - e^a\cdot f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[\frac{e^x\cdot f(x) - e^x\cdot f(a)}{x-a} + \frac{e^x\cdot f(a) - e^a\cdot f(a)}{x-a}\right]$$

Ξησάω $\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = (e^x)'_{x=a} = e^a$

$$\lim_{x\to a}\left[f(a)\cdot \frac{e^x-e^a}{x-a}\right]$$

♡ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$. $f'(x) \cdot g'(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\boxed{f''(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g''(x) = 0}$$

<u>Ν.δ.ο.</u> $$\frac{h'''(x)}{h(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{g'''(x)}{g(x)}.$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Rightarrow$$

$$h''(x) = f''(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x)$$

$$h''(x) = f''(x) \cdot g(x) + 2c + f(x) \cdot g''(x)$$

$$h'''(x) = f'''(x) \cdot g(x) + \underbrace{f''(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g''(x)}_{0} + f(x) \cdot g'''(x)$$

$$h'''(x) = f'''(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'''(x) \Leftrightarrow h'''(x) = \frac{f'''(x) \cdot h(x)}{f(x)} + \frac{h(x) \cdot g'''(x)}{g(x)}$$

Το α διπλή ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

όταν $P(\alpha)=0$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $\dfrac{P(x)}{x-\alpha} = P_1(x)$

ξανά-έχει ρίζα το α. Δηλ. $P_1(\alpha)=0$

$$\left.\begin{array}{r|l} P(x) & x-\alpha \\ \hline 0 & P_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} P_1(x) & x-\alpha \\ \hline 0 & P_2(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P(x) &= (x-\alpha)\cdot P_1(x) = \\ &= (x-\alpha)^2\cdot P_2(x) \end{aligned}$$

Το α είναι τριπλή ρίζα του $P(x) \Longleftrightarrow P(x)=(x-\alpha)^3\cdot Q(x)$

$\boxed{\text{Ασκ.17}}$ (α) (Το ευθύ) Έστω το α είναι 3-πλή ρίζα του $P(x)$

$\Longrightarrow P(x)=(x-\alpha)^3\cdot Q(x)$. $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)^3\cdot Q(\alpha)=0$

$P'(x)=3\cdot(x-\alpha)^2\cdot(x-\alpha)'\cdot Q(x)+(x-\alpha)^3\cdot Q'(\alpha) = 3(x-\alpha)^2\cdot Q(x)+(x-\alpha)^3\cdot Q'(\alpha)$

$P'(\alpha)=3\cdot(\alpha-\alpha)^2\cdot Q(\alpha)+(\alpha-\alpha)^3\cdot Q'(\alpha)=0$.

$\rightarrow P''(x)=\underbrace{6(x-\alpha)\cdot Q(x)}+\underbrace{3(x-\alpha)^2\cdot Q'(x)}+\underbrace{3(x-\alpha)^2\cdot Q'(\alpha)}$. $P''(\alpha)=0$

(Το αντίστροφο) Έστω $P(\alpha)=0 \Rightarrow x-\alpha$ παράγοντας $\Rightarrow \boxed{P(x)=(x-\alpha)\cdot P_1(x)\ (1)}$

$P'(x)=1\cdot P_1(x)+(x-\alpha)\cdot P_1'(x)$. Από (γ) $\Rightarrow P'(\alpha)=0 \Leftrightarrow P_1(\alpha)+\underbrace{(\alpha-\alpha)\cdot P_1'(\alpha)}_{=0}=0 \Leftrightarrow P_1(\alpha)=0$

Άρα το α ρίζα του $P_1(x) \Longrightarrow x-\alpha$ παράγοντας του $P_1(x) \Longrightarrow$

$P_1(x)=(x-\alpha)\cdot P_2(x)$. Από (1) $\Longrightarrow P(x)=(x-\alpha)^2\cdot P(x)$

Από την έκφραση: $P(x)=(x-a)^2 P_2(x)$

ξανά-παραγωγίζω, και απαιτώ $P''(a)=0$

$P'(x)=2(x-a)\cdot P_2(x)+(x-a)^2\cdot P_2'(x)$

$P''(x)=2P_2(x)+\underbrace{2(x-a)P_2'(x)}+\underbrace{2(x-a)\cdot P_2'(x)}+\underbrace{(x-a)^2 P_2''(x)}$

$P''(a)=0 \Leftrightarrow 2P_2(a)=0 \Leftrightarrow a$ ρίζα του $P_2(x) \Rightarrow P_2(x)=(x-a)Q(x)$

$(2) \rightarrow P(x)=(x-a)^3\cdot Q(x)$ ο.ε.δ.

---

17 (θ) $P(1)=0$

$P'(1)=0$

$P''(1)=0$

1) Ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους $P(x)$ είναι η παράγωγος του $P'(x)$

2) Ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=x'(t)=v(t)$$

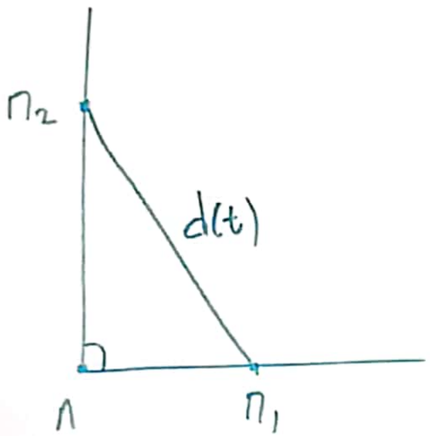
3) Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a(t)=v'(t)=x''(t)$$

Ασκ.4 / Σ. 125

$x_1(t)$ η συνάρτηση θέσης του Π_1

$x_2(t)$ » » » Π_2



$v_1 = 15\ km/h$

$v_2 = 20\ km/h$

i) $x_1(t) = 15t$, $x_2(t) = 20t$. $x_1'(t) = 15$, $x_2'(t) = 2$

ii) ονομάζω την απόσταση $\Pi_1\Pi_2 = d(t)$

$$d(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$$

$$d'(t) = \frac{\left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right)'}{2\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}} = \frac{\cancel{2}x_1(t)\cdot x_1'(t) + \cancel{2}x_2(t)\cdot x_2'(t)}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}}$$

$$= \frac{15\cdot 15t + 20\cdot 20t}{\sqrt{(15t)^2 + (20t)^2}} = \frac{625t}{\sqrt{625t^2}} = \frac{625\cancel{t}}{25\cancel{t}} = 25\ km/h$$