

Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ (θα το δείμε Δ_0) τότε:

$$1) \text{ Αν } f'(x) > 0 \quad \forall x \in \Delta_0 \implies f \uparrow \text{ στο } \Delta$$

$$2) \text{ Αν } f'(x) < 0 \quad \forall x \in \Delta_0 \implies f \downarrow \text{ στο } \Delta$$

Απόδειξη: Σχολ. & Διο (Σελ. 135).

$$1) \text{ Έστω } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2. \text{ Θα δ.ο. } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Έστω } x_1, x_2 \in \Delta \text{ με } x_1 < x_2, \\ \text{και } [x_1, x_2] \subseteq \Delta \\ \text{και } \text{αφ'ότι } (x_1, x_2) \subseteq \Delta_0 \end{array} \right\} \text{ Από Θ.Μ.Τ. } \implies \exists \xi \in (x_1, x_2) \subseteq \Delta_0 \text{ ώστε}$$

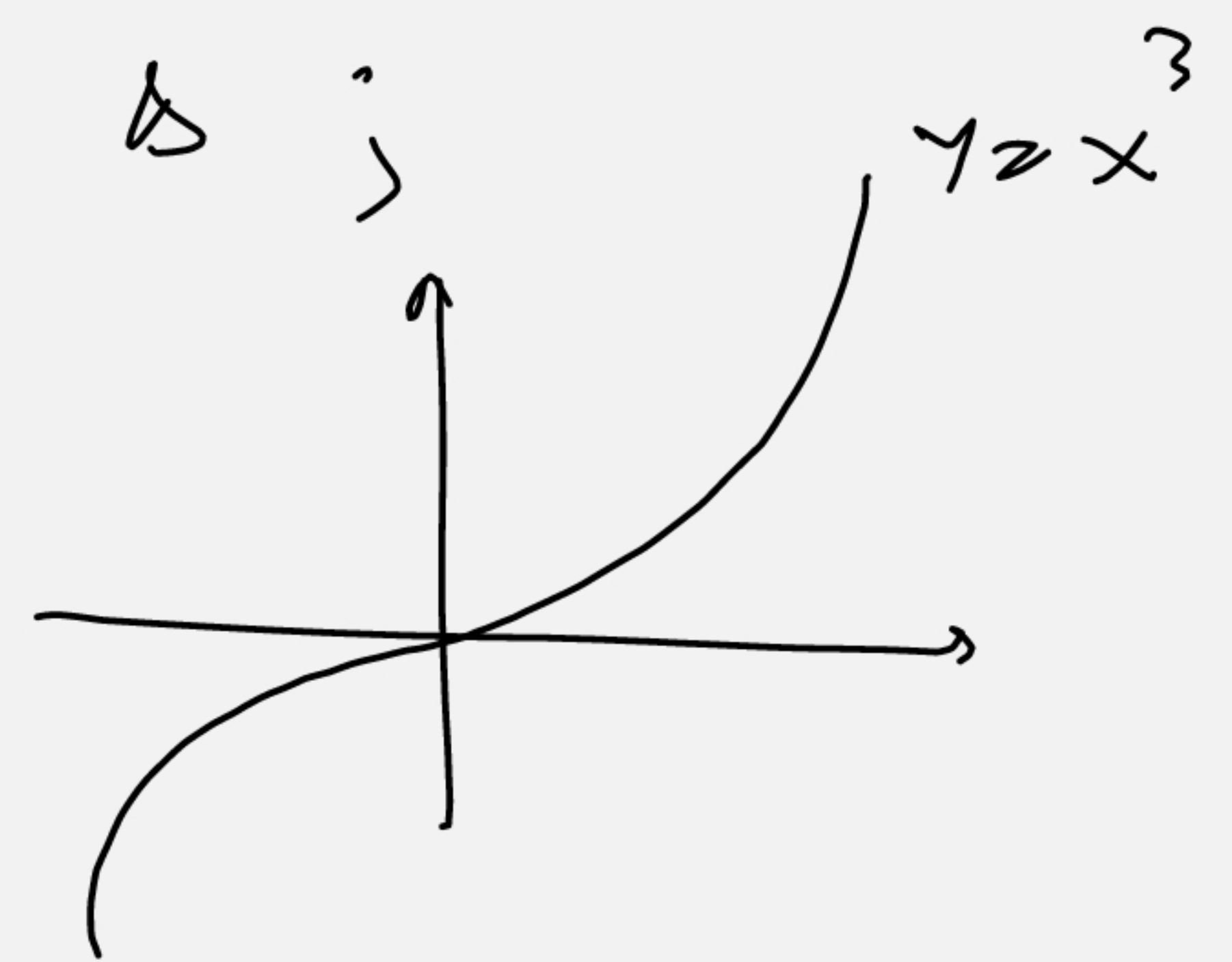
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0 \implies \boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad (1)}$$

Επομένως $x_1 < x_2 \implies x_2 - x_1 > 0 \xrightarrow{(1)} f(x_2) - f(x_1) > 0 \iff f(x_1) < f(x_2) \text{ ο.ε.δ.}$

Ερώτηση: Αν $f \uparrow$ σε διαστήμα τότε $f'(x) > 0$ σωστό;

Απάντηση: Όχι. Αντιπαράδειγμα: $f(x) = x^3 \uparrow$ σε $\mathbb{R}$

όμως $f(x) = 3x^2$. $f'(0) = 0$ δηλ. όχι γενικά.



Σοβαρή ερώτηση: Υπάρχει συνάρτηση $f \uparrow$ σε Δ και $x_0 \in \Delta_0$

ώστε $f'(x_0) < 0$. Απάντηση: Δεν υπάρχει. Θα σφραγίσω με αναγωγή

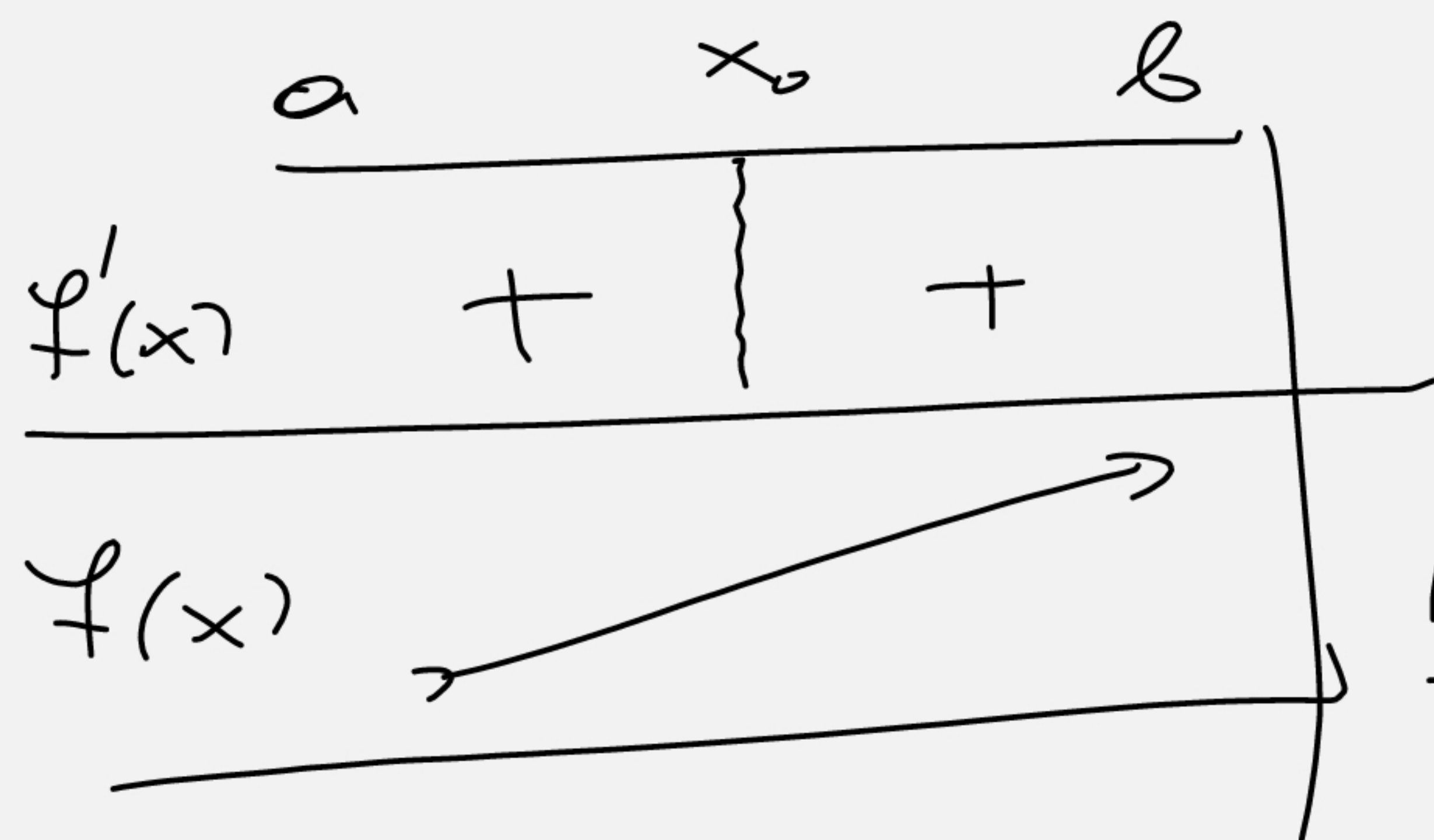
σε άτοπο. Ας έσω $f'(x_0) < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0$ κοντά
σε x_0

για $x_1 < x_0$, τότε κοντά σε $x_0 \Rightarrow x_1 - x_0 < 0$. $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_0) > 0 \Rightarrow$
 $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0$ Απο f όχι $\uparrow$
Άρα αν $f \uparrow$ σε $\Delta \Rightarrow f'(x) \geq 0$. 'Ατοπο.

Μάλιστα αν $f'(x) = 0$ δεν μπορεί να συμβεί σε υποδιαστήμα του Δ ,
αλλά σε μεμονωμένα σημεία.

Θεώρημα: Σελίδα 144

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραμύνη στο $(a, x_0), (x_0, b)$
 και $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$, τότε η $f \uparrow$ στο $[a, b]$.

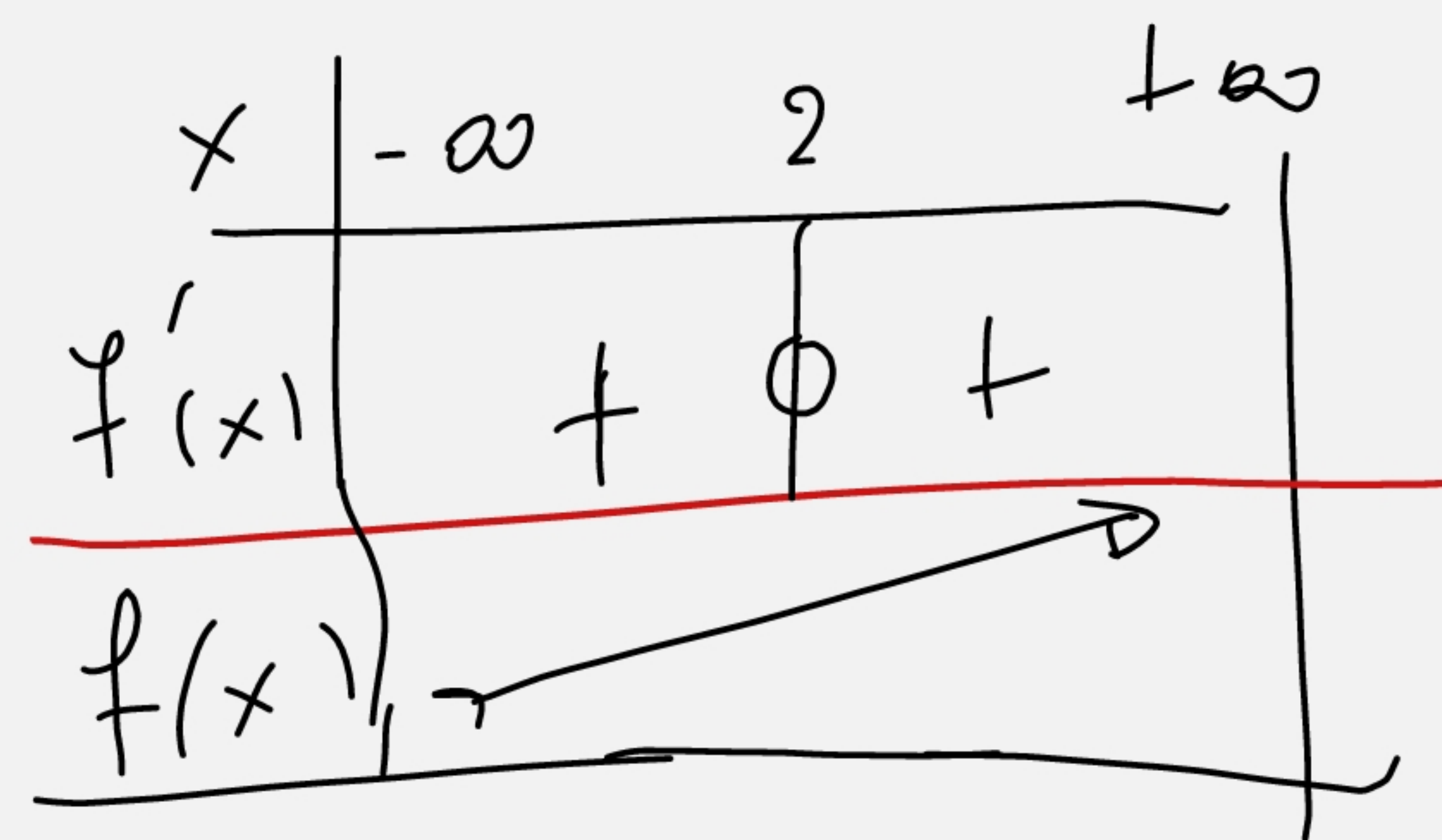
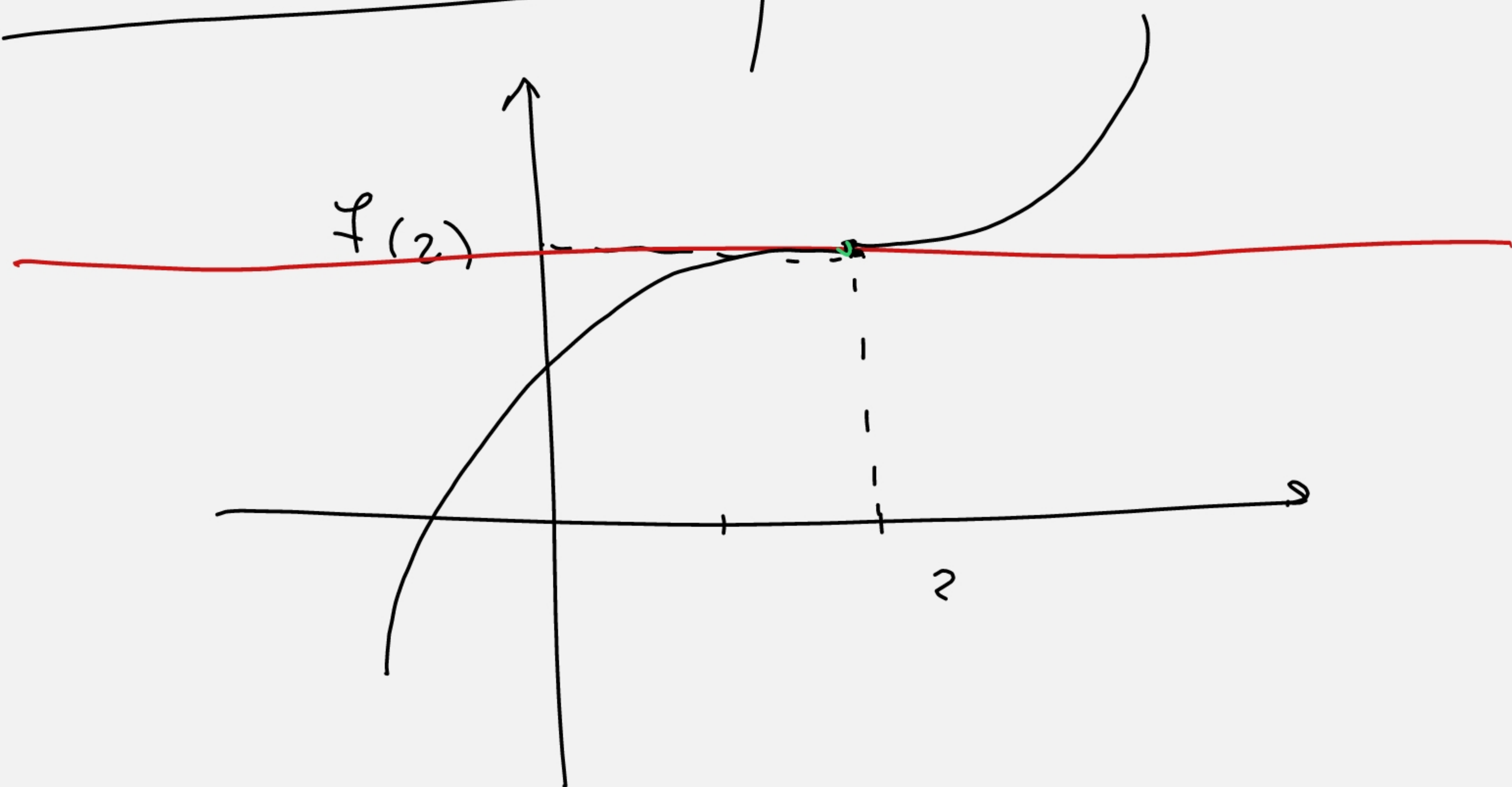


Παραδειγμα: Να μελετήσετε ως προς τα μονοτονία την

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 175, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12.$

Λύω την εξίσωση $f'(x) = 0 \Rightarrow$
 $3x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$
 $(x-2)^2 = 0$



$$f(x) = x - \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

$$\{ \text{Sichon } f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos x = \cos 0 \Leftrightarrow$$

$$x = kn, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Monotonia:

x	$-\infty \dots -2n$	$-n$	0	n	$2n \dots +\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗				

$f \uparrow$ on $\mathbb{R}$.