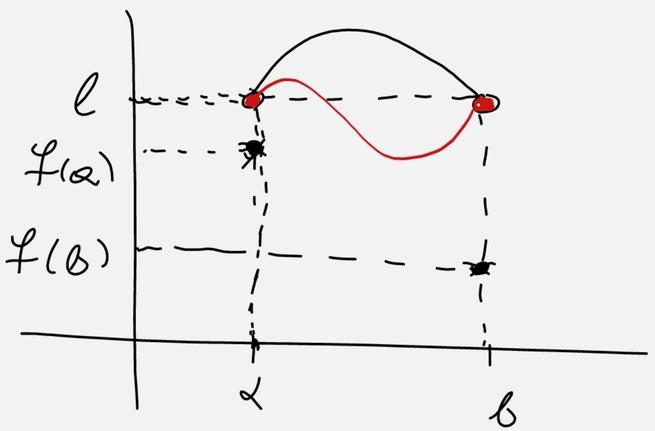
**Άσκηση:** Έστω συνάρτηση $f$ παρ/μη στο $(a,b)$ και $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$

Να δείξετε ότι $\exists\, \xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi)=0$.




$$l = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$$

$\Rightarrow \exists\, x_1 \in (a,b)$ κοντά στο $a$ $f(x_1)=l$

$\exists\, x_2 \in (a,b)$ >> στο $b$

Έστω $B(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in (a,b) \\ l, & \text{αν } x=a \text{ ή } x=b \end{cases}$

♡ $B(x)$ συνε στο $[a,b]$

$B(x) = f(x)$ για $x \in (a,b)$

και $\lim_{x\to a^+} B(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$

ομοίως $\lim_{x\to b^-} B(x) = l$

♡ $B(x) = f(x)$ παρ/μη στο $(a,b)$

♡ $B(a) = B(b) = l$

Από Θ. Rolle

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$:

$B'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$f'(\xi) = 0$.

Έστω συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $(a,b)$ και $\lim_{x\to a^+} f(x) < 0$ και $\lim_{x\to b^-} f(x) > 0$.

Ν.δ.ο. $\exists\, \xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

<u>Λύση:</u> Αφού $\lim_{x\to a^+} f(x) < 0 \Longrightarrow \exists\, x_1$ κοντά στο $a^+$ ώστε $f(x_1) < 0$

Αφού $\lim_{x\to b^-} f(x) > 0 \Longrightarrow \exists\, x_2$ " στο $b^-$ " $f(x_2) > 0$

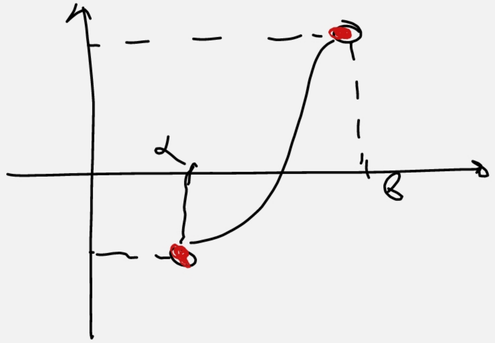
Η $f$ ορισμένη στο $[x_1, x_2] \subseteq (a,b)$, άρα Θεωρ. Bolzano $\Longrightarrow$

$\exists\, \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (a,b)$ ώστε $f(\xi) = 0$

---

<u>2η Λύση:</u>

$$\Xi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b) \\ \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1, & x = a \\ \lim_{x\to b^-} f(x) = l_2, & x = b \end{cases} \quad \ldots$$



Συνέχεια χθεσινού προβλήματος: άσκ.5 / Σελ 173 – σχολικό.

$$f(\vartheta)=\frac{1}{\eta\mu\vartheta}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}, \quad 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$$

$$f'(\vartheta)=\frac{-\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu^2\vartheta}-\frac{(-\eta\mu\vartheta)}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}=-\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu^2\vartheta}+\frac{\eta\mu\vartheta}{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}=$$

$$\frac{-\sigma\upsilon\nu^3\vartheta+\eta\mu^3\vartheta}{(\eta\mu\vartheta\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2}$$

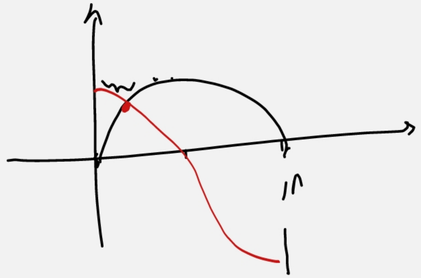
Λύνω την εξίσωση

$f'(\vartheta)=0 \Leftrightarrow$

$-\sigma\upsilon\nu^3\vartheta+\eta\mu^3\vartheta=0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu^3\vartheta=\sigma\upsilon\nu^3\vartheta \overset{\sqrt[3]{\ }}{\Longleftrightarrow}$

$\eta\mu\vartheta=\sigma\upsilon\nu\vartheta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\vartheta=1 \Leftrightarrow x=\pi/4$



| | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\vartheta)$ | | | $0$ | | |
| $f(\vartheta)$ | | | | | |

Άρα $f'(\vartheta)=0 \Leftrightarrow \vartheta=\pi/6$

Έστω $B(x)=-\sigma\upsilon\nu^3x+\eta\mu^3x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

| | $0$ | | $\pi/4$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B(\vartheta)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$B(0)=-\sigma\upsilon\nu^3 0+\eta\mu^3 0=-1$

$B\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sigma\upsilon\nu^3\frac{\pi}{2}+\eta\mu^3\frac{\pi}{2}=1$

| | $0$ | | $\pi/4$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $B(\vartheta)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(\vartheta)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(\vartheta)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

ασκ. 14 / Σελ 176

12.500 k νοικάτες

| | Εργασία | κόστος |
|---|---|---|
| Εργάτης | 125 k. | 6€/h |
| Επιστάτης | | 10€ |
| Εκείνη | | 10 €/εργαλ. |

πλήθος εργατών = x

Ελάχιστο κόστος

Έστω ότι θα εργαστούν y ώρες

κόστος αμοιβής εργατών $(6 \cdot x + 10) \cdot y$

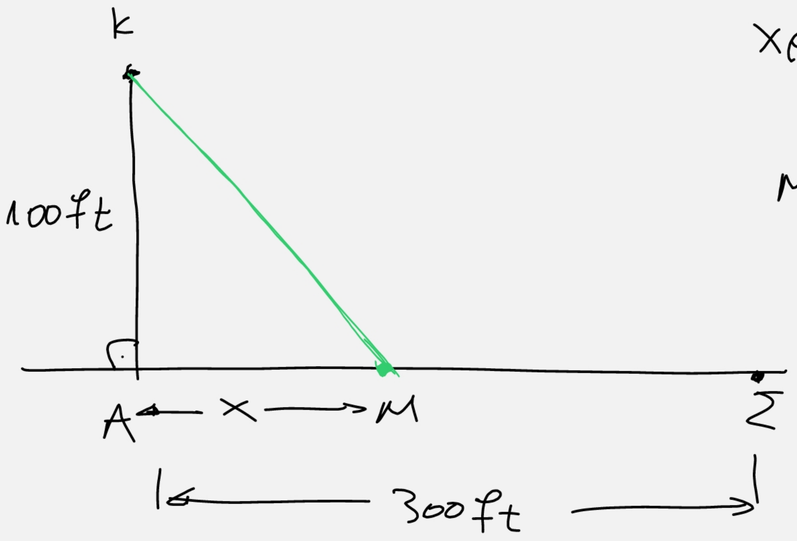
>> εκμισθώσεις $(x+1) \cdot 10$

Συνολικό κόστος: $(6x+10)y + 10 \cdot (x+1) = k(x,y)$

Θα ισχύει $125 \cdot x \cdot y = 12.500 \Rightarrow y = \frac{12500}{125 \cdot x} = \frac{100}{x}$.

κόστος: $k(x) = (6x+10)\frac{100}{x} + 10x + 10$, $x > 0$

## Ασκ. 13 / Σελ 153




$v_k = 3\,ft/s$

$v_n = 5\,ft/s$

$t_{\text{ελαχ.}}$

$KM = \sqrt{100^2 + x^2}$

χρόνος καλύμβησης: $t_k$.

$v_k = \frac{KM}{t_k} \Rightarrow t_k = \frac{KM}{v_k} = \frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3}$

$M\Sigma = 300 - x$

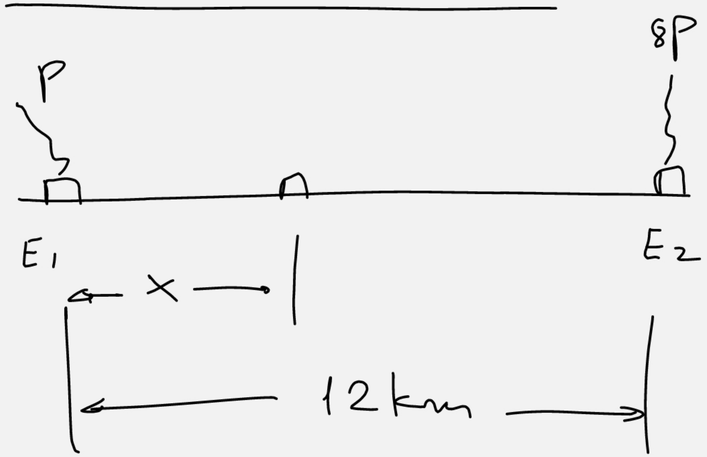
χρόνος πεζοπορίας $t_n$.

$v_n = \frac{M\Sigma}{t_n} \Rightarrow t_n = \frac{M\Sigma}{v_n} = \frac{300-x}{5}$

Συνολικός χρόνος $t_k + t_n = \frac{\sqrt{100^2+x^2}}{3} + \frac{300-x}{5} = T(x)$

Φυσικός περιορισμός για το $x$: $0 \le x \le 300$

# Ασκ. 14 / Σελ. 153




Πυκνότητα κανονή $n$

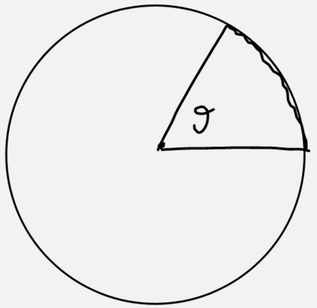
πυκνότητα από το $E_1$: $n_1(x) = \dfrac{\lambda P}{x^2}$

πυκνότητα από το $E_2$: $n_2(x) = \dfrac{\lambda \cdot 8P}{(12-x)^2}$

Συνολική πυκνότητα $n(x) = n_1(x) + n_2 = \dfrac{\lambda P}{x^2} + \dfrac{8\lambda P}{(12-x)^2}$

Φυσικός περιορισμός: $0 \le x \le 12$

## Μήκος τόξου (που έχει γωνία θ rad)




Για ολόκληρο κύκλο:

Μήκος $L = 2\pi R$

Γωνία $\varphi = 2\pi$

Αναλογία: $\dfrac{2\pi R}{2\pi} = \dfrac{l}{\theta} \Rightarrow R = \dfrac{l}{\theta} \Rightarrow$

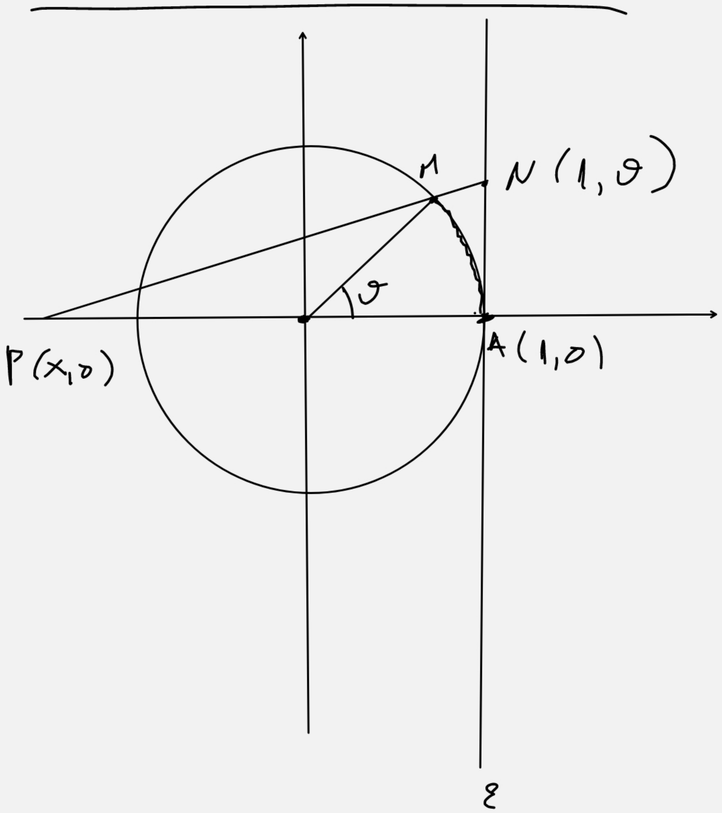
[Χρήσιμο κλάσμα: $\dfrac{\text{Μήκος κύκλου (τόξου)}}{\text{Γωνία} \quad \to \quad \to}$]

$$\boxed{l = \theta \cdot R}$$

rad

ασκ. 12 / Σελ. 176

i)




$C: x^2 + y^2 = 1$