Θεώρημα: Κανόνας De L'Hospital

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g'(x) = m$

Τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{l}{m}$.

Σημείωση: Το Θεώρημα ισχύει και για πλευρικά όρια $x \to x_0^+$ ή για $x \to x_0^-$, όπως επίσης και για $x \to \pm\infty$

Θεώρημα: 2ος Κανόνας De L'Hospital.

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ και $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$ τότε

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Σημείωση: Το Θεώρημα ισχύει και για $x \to x_0^-, x_0^+, \pm\infty$

" " " " " και όταν $l = \pm\infty$

Προσοχή: Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ή το $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε δεν μπορώ να πω τίποτα για το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε μπορώ να πω ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\eta\mu x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Συμπέρασμα: Η ποσότητα $x-\eta\mu x$ όταν $x\to 0$ έχει 3 βαθμούς απροδιορίστου.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{e^0}{1}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{x}(e^x-1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}\cdot\left|\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1\right.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{x\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}\right]=\frac{1}{1}\cdot 2=2$$

$A(x)$

$$\lim_{x\to 0}A(x)\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x}-\cancel{\cos x}+x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cdot\cos x}{+\sin x}=$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

$$\left|\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\cdot\frac{x^3}{x-\sin x}\right]\right.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x - x\cos x}{x}}{\frac{x-\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-\cos x}{1-\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+\sin x}{e^x+x+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1+\cos x}{e^x+1}$$

$$-1 \le \sin x \le 1 \iff$$

$$x^2+x-1 \le x^2+x+\sin x \le x^2+x+1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+\sin x) = +\infty$$