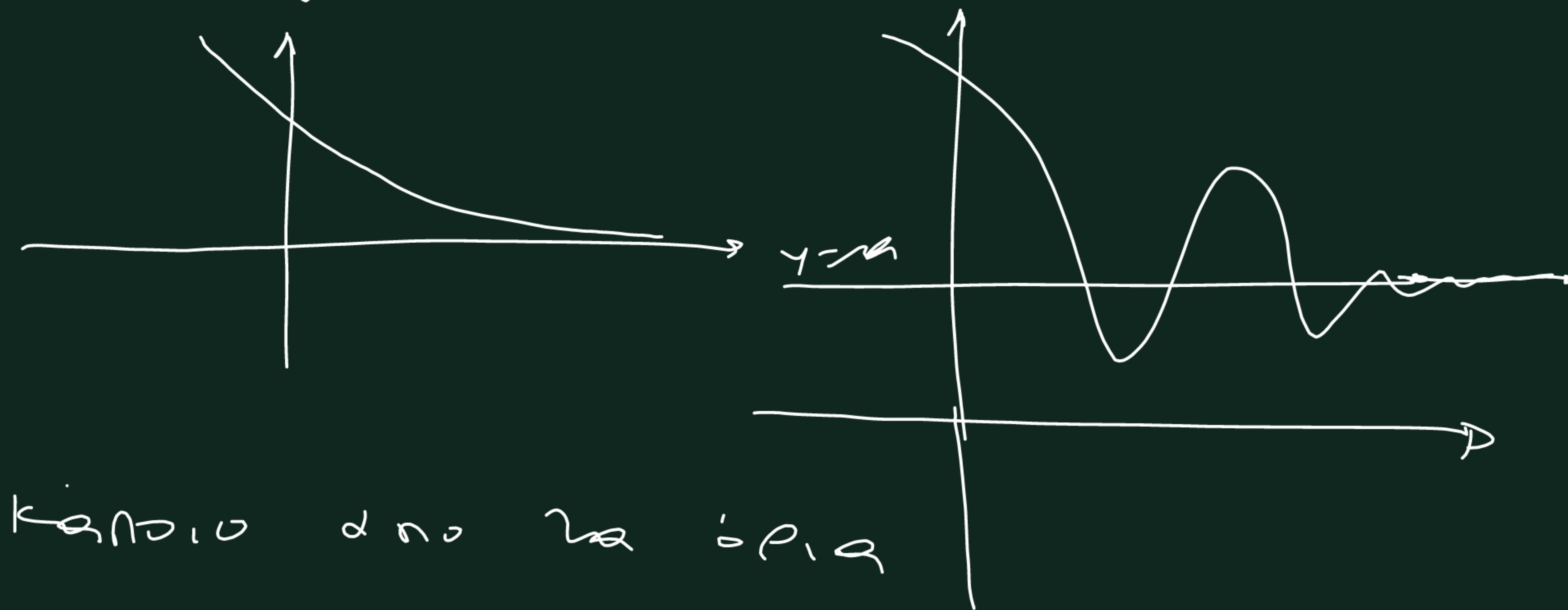


Ορισμός: Η εωθία $y=a$ λέγεται ορίσθια ασύμπτωτη $\Leftrightarrow$

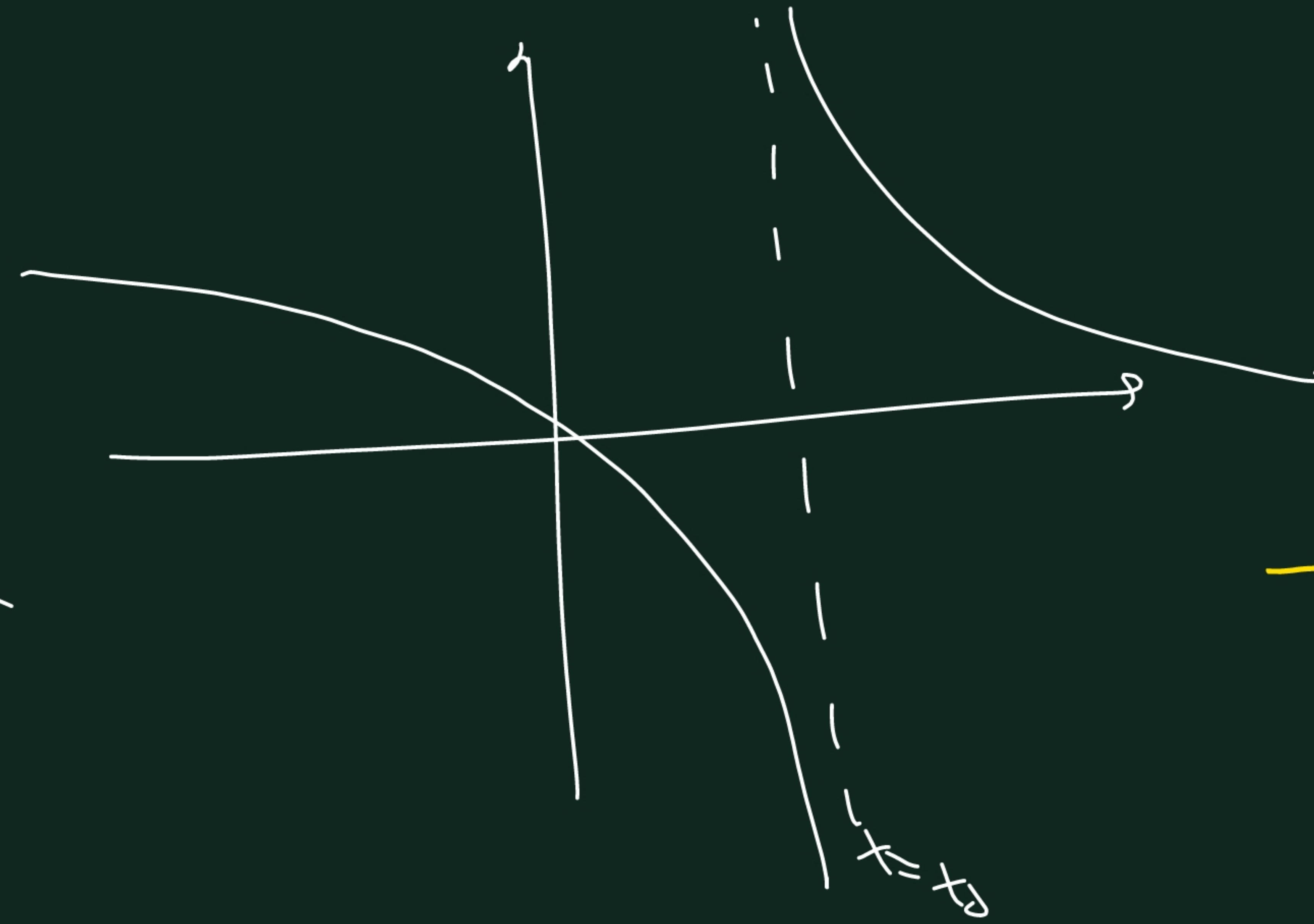
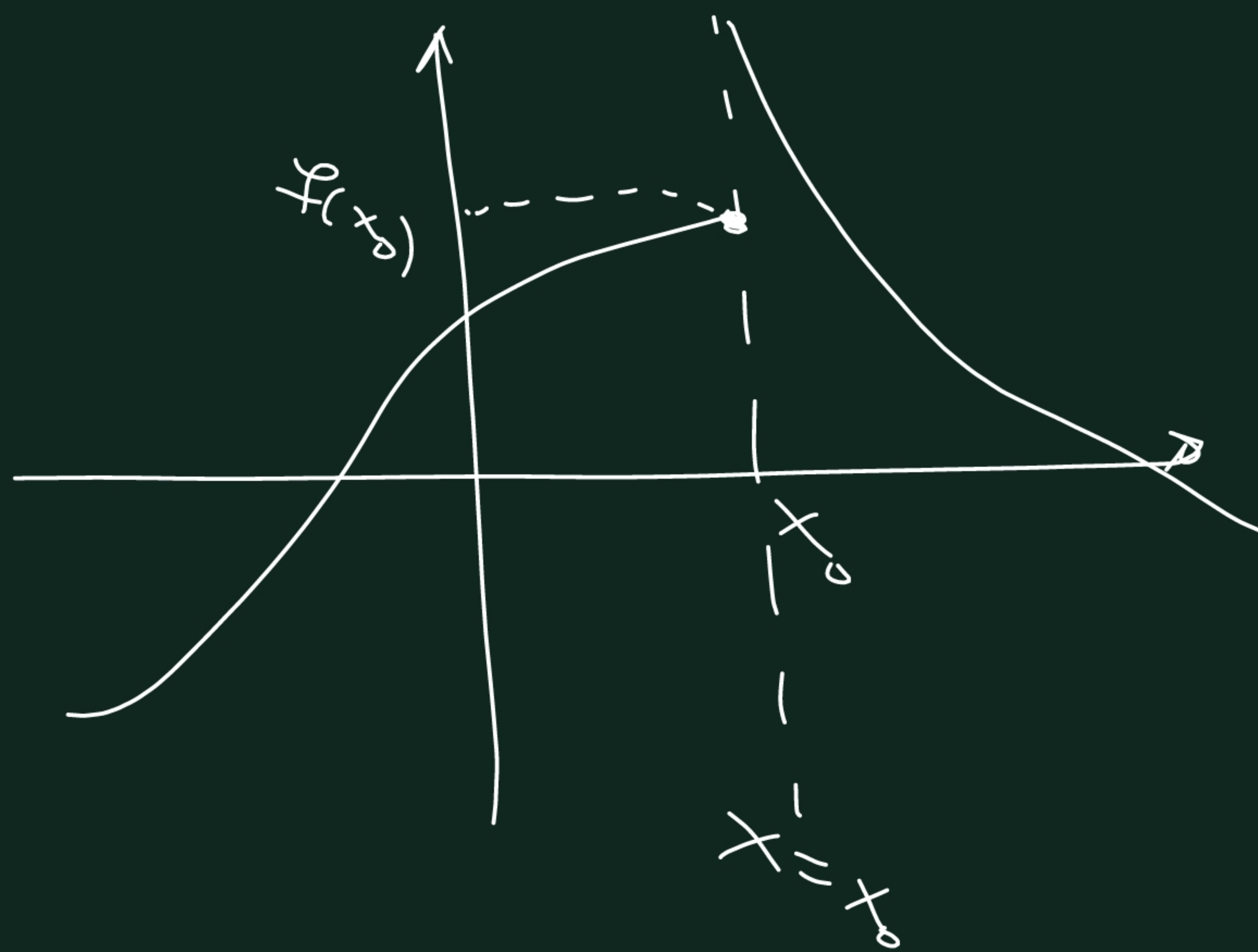
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \text{ ή } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$



Ορισμός: Η εωθία $x=x_0$ λέγεται

κατακόρυφη ασύμπτωτη $\Leftrightarrow$ κάποιο a να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ ή } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ είναι } +\infty \text{ ή } -\infty$$



κατακόρυφες ασύμπτωτες
ψάχνουμε για σημεία:

- 1) Μηδενισμόν παράστασης.
- 2) Μηδενισμόν ορίσματος
λογαριθμικ.

Π.χ. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ Να βρεθούν κατακόρυφοι και οριζόντιοι ασύμπτωτες

Λύση | πρώτα $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$\rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{2x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ ή εφ' όσον $x = 1$
 DLH $x \rightarrow 1$ δίνω έναν κατακόρ. ασύμπτωτη

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\underbrace{\frac{(x^2 - 3x + 2)}{x - 1}}_{A(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x + 1}}_{B(x)} \right]$

$1 + 3 + 2 = 6$, $x \rightarrow -1 \Rightarrow x + 1 \rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow -1} A(x) = \frac{6}{-2} = -3$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 1} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x + 1} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

Άρα $\sim$ εφ' όσον

$x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη με C_f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \text{η ευθεία } y=1 \text{ ορίζουσα ασύμπτωτη ως } x \rightarrow \pm\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = 1$. Παρατήρηση: Αν μια ρητή συνάρτηση (δηλ. κλάσμα πολυωνύμων) έχει ορίζουσα ή παράχρη ασύμπτωτη ως $+\infty$ τότε (λίστα κοτρώτιδου) έχει την ίδια ορίζουσα και ως $-\infty$.

Ορισμός: Λίστα ότι η ευθεία $y = ax + b$ είναι παράχρη ασύμπτωτη ως $x \rightarrow \pm\infty$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ή όταν $x \rightarrow -\infty$

Θεώρημα: Η ευθεία $y = ax + b$ είναι παράχρη ασύμπτωτη ως $x \rightarrow \pm\infty$ $\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \end{array} \right\}$$

Aufgabe: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 5}$ N. & bestimme o. asymptoten.

Lösung: $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 5} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^+} \left[(x^2 - 3x + 2) \cdot \frac{1}{x - 5} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x + 2) = 12 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x - 5} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x - 5} = -\infty$$

1. Linie $x = 5$

Es ist keine Asymptote
 $\Rightarrow f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 5} - \frac{x}{1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x(x - 5)}{x - 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2 + 5x}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{x - 5} = 2$$

"Kaw" da
 2. Linie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = a$$

