

$$\text{Aber } \deg(x \cdot Q(x)) > \deg P(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) \text{ zu zwei Werten, } b \in \mathbb{R}$$

Diese 2 Ableitungen sind möglich.

Parab. $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - x}$ (x, 1, 1, 2, 1, 1)

$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 1}$ möglich

$f(x) = \frac{2x-1}{x^2+3} \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{2x-1}{x^3+3x}$

↳ 2, 1, 2 möglich

$f(x) = \frac{x^4 + 2x + 1}{x^2 + x + 5} \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^4}{x^3} = \pm \infty$

Για $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x-1}$. Να μελετήσει ως προς τις ασυμπτωτές

Περίοδος: $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, $x > 0$
 Άρα $D_f = A = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x \cdot \underbrace{\frac{\ln x}{x-1}}_{A(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} A(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} A(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x \cdot \ln x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{B(x)} \cdot \underbrace{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}_{A(x)} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$$

Άρα
 δεν έχει
 κατακόρυφες
 ασυμπτωτές

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \ln x}{\cancel{x} \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \frac{\ln x}{x-1} \right] = \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x \cdot \frac{x}{x-1} \right) = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Die Ableitung der Ableitung
wird $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(1 - e^{-x}) \cdot \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln x}{\frac{1}{1 - e^{-x}}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{e^x}{e^x - 1}} \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - e^{-x}) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$$

$$\frac{e^x}{e^x \cdot (1 - e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$