ΘΕΜΑ 8ο ΕΜΕ 2018

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=1$
- $(x-1)f''(x)+2f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\frac{\ell n x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

Το $(0,+\infty)$ έχει "σπάσει" για την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f''(1)=\frac{2}{3}$

δ) Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις $g(1)=1$ και $(g(x)-f(x))(g(x)+3f(x))=0$, για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι $f=g$

ε) Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/sec. Αν Α είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Β τυχαίο σημείο του άξονα $y'y$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο $(1,f(1))$.

α) $(x-1)f''(x)+2f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $x>0$

$(x-1)\cdot(f'(x))'+(x-1)'\cdot f'(x)$

$f''(x)+\frac{2}{x-1}\cdot f'(x)=-\frac{1}{x^2(x-1)}$

$e^{2\ln(x-1)}$

$f''(x)\cdot e^{2\ln(x-1)}+\frac{2}{x-1}\cdot e^{2\ln(x-1)}\cdot f'(x)=$

$=-\frac{1}{x^2(x-1)}\cdot e^{2\ln(x-1)}$ ατελέσφορη.

$\frac{x-1}{2}f''(x)+f'(x)=\frac{-1}{2x^2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}f''(x)+\frac{1}{2}f'(x)=\dots$

$$(x-1)\cdot f''(x) + 2f'(x) = -\frac{1}{x^2} \iff$$

$$x^2(x-1)\cdot f''(x) + 2x^2 f'(x) = -1$$

$$(x^3-x^2) \qquad (3x^2-2x) \qquad (\cancel{x})$$

$$\underline{(x-1)f''(x) + f'(x)} + f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\big((x-1)\cdot f'(x)\big)' + f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$\big((x-1)f'(x) + f(x)\big)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \iff$$

Αφού $x \in (0,+\infty)$

$$(x-1)\cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} + c$$

$f(1)=1$

για $x=1 \Rightarrow c=0$

Άρα: $(x-1)\cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \iff$

$$(x-1)f'(x) + (x-1)'\cdot f(x) = \frac{1}{x} \iff$$

$$\big[(x-1)f(x)\big]' = (\ln x)' \overset{x\in(0,+\infty)}{\iff}$$

$$(x-1)f(x) = \ln x + c_1$$

για $x=1 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow$

$$(x-1)f(x) = \ln x \xrightarrow{x\neq 1} f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

Αφού f παρ/μη ⇒ σχής ⇒

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \dots 1$$

$f'(x) = \dots \dfrac{x-1-x\cdot\ln x}{x\cdot(x-1)^2}$, $x\cdot(x-1)^2 > 0 \quad \forall x>0$

Θέτω $A(x) = x-1-x\ln x$, $A(1) = 0$

$A'(x) = 1 - \ln x - x\cdot\frac{1}{x} = -\ln x$

	0		1		$+\infty$
$A'(x)$		+	0	−	
$A(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
			ολ. μεγ.		

$x > 1 \Rightarrow A(x) < A(1) = 0$

$A(x) < 0$

$x < 1 \overset{A\uparrow}{\Rightarrow} A(x) < A(1) = 0$

Άρα

	0		1		$+\infty$
$A(x)$		−		−	
$f'(x)$		−	0	−	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

Αφού $f'(x) < 0$

$x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

και f συνεχής στο 1 $\Rightarrow$

$f \downarrow$ στο $(0,+\infty) = A$

Αφού f συνεχής και $\downarrow$ $\Rightarrow$

$f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)$