

Es sei f Glns zu $\mathbb{R}$ mit $f^2(x) = 1 + 2x \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$

N.S.o. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f^2(x) - 2x f(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x f(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow |f(x) - x| = \sqrt{1 + x^2} \quad (1)$$

$$(*) \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1 + x^2} + x \quad (1 + x^2 > 0)$$

1. Gewissung $A(x) = f(x) - x$.

1.1. zu zeigen $A(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$|A(x)| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ unmöglich}$$

~~$A(x)$ Glns zu $\mathbb{R}$ mit $A(x) \neq 0$~~

und $x \neq 0 \Rightarrow$ direkt

1.2. zu zeigen. $A(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$

$$\Rightarrow A(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Αν $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a.$

Αν $f(x) - x > 0 \Rightarrow |f(x) - x| = f(x) - x$

β'ερωμα N.δ.ο. $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$

Λύση: $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$



Μίχρη Γυθμής : $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$, $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

(γ) Ν.δ.ο. f αντιστρέφεται, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\sqrt{x^2+1} > 0 \quad f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{0^2+1} + 0 = 1 > 0 \quad f \uparrow \Rightarrow 1-1$$

Έστω $B(x) = \sqrt{x^2+1} + x = f(x)$

Νύκω μν εξίσωση $B(x) = 0 \iff$ Άρα $B(x) \geq 0$
 $B(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\sqrt{x^2+1} = -x \Rightarrow$$

$$x^2+1 = x^2 \iff 1=0 \quad \text{ΑΤΟΝ}$$

Bolzano

Ποια είναι τα σημεία που ορίζουν μια διαμέριση και μπορεί να μην ορίζουν η f' :

1) Σημεία που μηδενίζονται ή υπάρχουν ή το πεδίο ορισμού αντιστρέφεται

2) Σημεία αλλαγής κλάδου.

Για να παραμένω, πρέπει να ελέγχω με παραγωγισιότητα, με τον ορισμό

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\Rightarrow B(x)$ διαφέρει η πρόκληση. $B(0) = \sqrt{0^2 + 1} + 0 = 1 > 0$.

'Ας $B(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}_{f'(x)} \Rightarrow f \uparrow \Rightarrow f$ αντιστρέφεται

Το ηξδίο ορεσθού ης f' είναι η σωστό τιμή ης f .

Το $\rightarrow \rightarrow$ ης f είναι η $\mathbb{R}$. Ας οί $f \uparrow$ ηαν $\in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0$$

Κριτήριο για εξάχως ηεξισωβήθου ορου: $\sqrt{x^2} + x = |x| + x = -x + x = 0$.

(f) A_v $a > 0$ kan $a+b=0$ v.d.o. n. $\{z_i \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z_i) = a, \text{Im}(z_i) = b\}$

$$\boxed{\frac{\ln(f(a))}{x} - \frac{\ln(f(b))}{x-1} = 0} \quad (1)$$

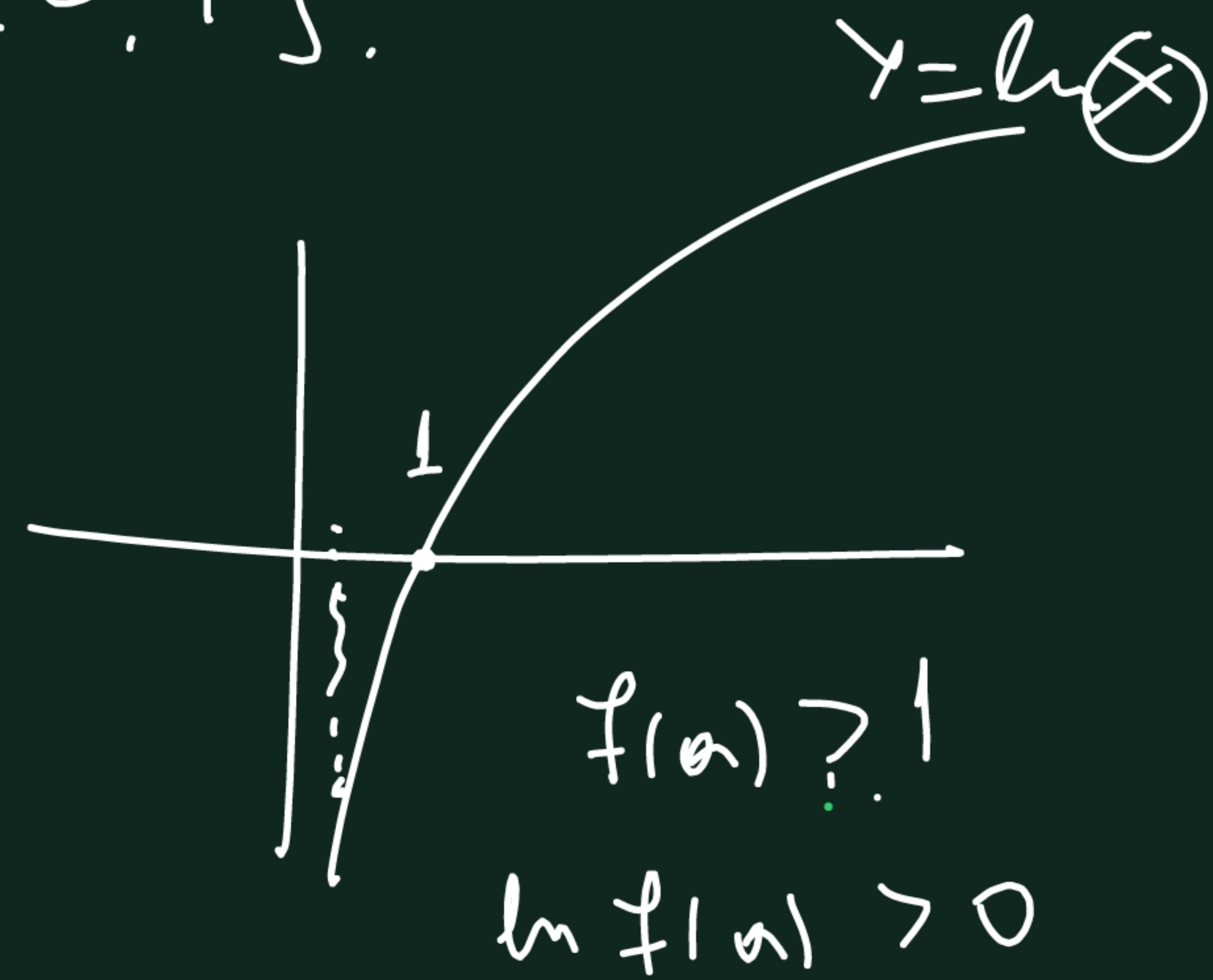
Aussage: Γ_a $x \neq 0, x \neq 1$ in (1) sind 160 Divisionen

$$(x-1) \cdot \ln(f(a)) - x \cdot \ln(f(b)) = 0 \quad (2)$$

'Es gilt $f(x) = (x-1) \cdot \ln(f(x)) - x \cdot \ln(f(0))$ für $x \in [0, 1]$.

$$\Gamma(0) = -\ln(\mathbb{I}(a)) < 0$$

$\prod_{\rho \in \Lambda} \{ \rho \in \Lambda \mid \rho \in \Lambda \} \quad \text{zu} \quad f(q) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{q^2 + 1} + q > 1 \Leftrightarrow$
 $\sqrt{q^2 + 1} > 1 - q \quad (3) \quad \left\| \begin{array}{l} A \\ A \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1 - q < 0 \Leftrightarrow q > 1 \quad \text{wobei in (3) } 1 - q < 0 \text{ nicht} \\ 1 - q \geq 0 \Leftrightarrow q \leq 1 \Leftrightarrow 0 < q \leq 1 \end{array}$



$$\text{Wir (3) } \Rightarrow \sqrt{a^2+1}^2 > (1-a)^2 \Leftrightarrow a^2+1 > 1-2a+a^2 \Leftrightarrow 0 > -2a \Leftrightarrow 2a > 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ so offensichtlich. 'Aber in (3) offensichtlich 62 k\u00e4\u00dfe}$$

$$\text{Aber } f(a) > 1 \Rightarrow \ln(f(a)) > 0 \Rightarrow -\ln(f(a)) < 0 \quad \text{Ergebn$$

$$\Gamma(1) = -1 \cdot \ln(f(1)) = -\ln(f(-1)) > 0$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + x. \quad f(-a) = \sqrt{a^2+1} - a = \frac{1}{\sqrt{a^2+1} + a} < 1$$

$$f(-a) < 1 \Rightarrow \ln(f(-a)) < 0 \Rightarrow$$