

ΘΕΜΑ Β 2023

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$, $x > 0$.

B2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1 + x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

$$\boxed{B_1} \quad D_{g \circ h} = \left\{ x \in D_h \mid h(x) \in D_g \right\}$$

$x > 0 \quad \ln x \in \mathbb{R} \checkmark$

$$A_{f \in D_{g \circ h}} = (0, +\infty)$$

$$\begin{aligned} (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = g(\ln x) \\ &= \frac{4 - e^{2 \ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4 - x^2}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{B_2} \quad (i) \quad f'(x) = \left(\frac{4 - x^2}{x} \right)' = \frac{-2x \cdot x - (4 - x^2) \cdot 1}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2}$$

$-x^2 \leq 0$
 $-4 < 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - 4 < 0$

Αρα $f'(x) < 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow f \downarrow \text{ σε } (0, +\infty)$

$$(ii) \quad f(x) = \frac{4-x^2}{x} > 0.$$

$$\frac{4-n^2}{4-e^2} > \frac{n}{e} \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{4-n^2}{n} \cdot \frac{1}{4-e^2} > \frac{1}{e} \quad (2)$$

$$e > 2,5 \Rightarrow e^2 > 6,25 > 4 \Rightarrow$$

$$4-e^2 < 0$$

$$(2) \Rightarrow \frac{4-n^2}{n} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow$$

$$f(n) < f(e) \xLeftrightarrow f \downarrow n > e \quad \begin{matrix} \text{σο οσο} \\ \text{ικανως} \end{matrix}$$

→ δελ ικανως να
n (1)

$$\boxed{B3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4-x^2}{x} = +\infty$$

$$x > 0. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (4-x^2) = 4 > 0$$

Ουλοθεωρη: όταν έχουμε μορφή $\frac{0}{0}$

$$\text{τις} \quad \frac{A(x)}{B(x)} = A(x) \cdot \frac{1}{B(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{B(x)} = \pm \infty$$

$B(x)$ να διαμει πρόσημο
εκατέρωθεν του x_0 .

Αρα η ευθεία $x=0$ χαρακτηρίζεται ως άκνηση.

{ {ενα} } η άκνηση + ορίσους άκνησηes 6w + ∞.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = a.$$

$$f(x) = \frac{4-x^2}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + \frac{x}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0. \quad \text{Αρα η } C_f \text{ έχει άκνηση άκνησηes 6w + ∞ η ευθεία } y = -x.$$

$$\boxed{B4} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6w(1+x^2)}{f(x)}$$

$$1+x^2 \rightarrow \infty \cdot 6w(\infty)$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \cdot 6w(\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

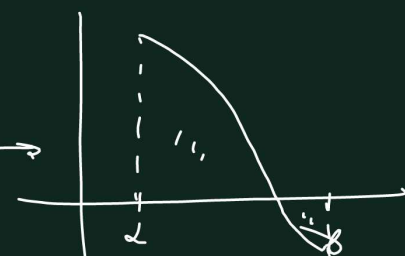
$$\left| \frac{1}{f(x)} \cdot 6w(1+x^2) \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot |6w(1+x^2)| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \cdot 1$$

$$\text{Αρα } \left| \frac{1}{f(x)} \cdot 6w(1+x^2) \right| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right|$$

$$-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{1}{f(x)} \cdot \cos(1+x^2) \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right| \quad \text{Also Krümmung nach oben} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(1+x^2)}{f(x)} = 0$$

$\rightarrow 0$

- 1) Av $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ $\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$ (Σ)
- 2) Av $\int_a^b f(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ ($\wedge$) $\rightarrow$ 
- 3) Av $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ kann $f(x) \neq 0, x_1 \in (a, b)$ $\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$ (Σ)
- 4) Av $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ kann $\int_a^b f(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ (Σ)

Me analysiert es dann: $\left. \begin{array}{l} \text{für } \exists x_1: f(x_1) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > 0$ 'Azero'

