

Ορισμός της f^{-1} : Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ 1-1

$\forall y \in f(A)$, υπάρχει μοναδικό $x \in A$ ώστε $f(x) = y$.

Ορίζουμε την f^{-1} να είναι η συνάρτηση που αντιστοιχεί το y στο x
δηλαδή $f^{-1}(y) = x$. Προφανώς το π.ο. της f^{-1} είναι το $f(A)$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 + 1$ και

$$(f \circ g)(x) = (x-1)^2, \quad x \geq 0$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$, $x \in [1, +\infty)$ (Μονάδες 5)

B2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(f(x))}{x-2}$. (Μονάδες 5)

B3. Να υπολογιστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[1, \alpha]$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την τιμή ξ του συμπεράσματος του θεωρήματος. (Μονάδες 5)

$$\textcircled{B2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(f(x))}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right]$$

$$\text{Πεζοράω: } f(2) = 2 - 2\sqrt{1} = 0 \quad \left\{ \frac{\eta\mu 0}{0} \right\}$$

$$A(x) = \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \quad B(x) = \frac{f(x)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} A(x) \stackrel{\text{ορίω}}{=} \lim_{\substack{f(x)=u \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} B(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{x-2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - 2 \cdot \frac{(x-1)'}{2\sqrt{x-1}}}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} [A(x) \cdot B(x)] = 1 \cdot 0 = 0$$

$$(f \circ g)(x) = (x-1)^2$$

$$f(x^2+1) = (x-1)^2$$

$$\text{ορίω } x^2+1 = y \Rightarrow$$

$$x^2 = y-1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$$

$$x = \sqrt{y-1}$$

$$f(y) = (\sqrt{y-1} - 1)^2$$

$$f(y) = \sqrt{y-1}^2 - 2\sqrt{y-1} + 1$$

$$f(y) = y-1 - 2\sqrt{y-1} + 1$$

$$f(y) = y - 2\sqrt{y-1}$$

$$f(x) = x - 2\sqrt{x-1} \quad \text{ο.ε.δ.}$$

B3. Να υπολογιστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[1, \alpha]$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την τιμή ξ του συμπεράσματος του θεωρήματος. (Μονάδες 5)

$$f(x) = x - 2\sqrt{x-1} \quad \text{Προϋποθέσεις Θ. Rolle:}$$

1) f συνεχής στο $[1, \alpha]$. Αν είναι συνεχής για οποιοδήποτε α .

2) f παραγωγική στο $(1, \alpha)$. Αν είναι παραγωγική $\Rightarrow \alpha$.

3) $f(1) = f(\alpha)$, $\alpha \neq 1$. Βρίσκω $f(1) = 1$

$$\psi \alpha \chi \nu \omega \alpha \neq 1: f(\alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha-1} = 1$$

$$f(x) = \left(\sqrt{x-1} - 1 \right)^2$$