

Έστω $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{ax^2 - x + 2}{x+1}$, $a \in \mathbb{R}$, η ευθεία $\varepsilon: y = x - 2$

Είναι λάνθρα αρίθμωσ ης C_f ες $+\infty$.

(B1) Ν.δ.ο. $a = 1$. (B2) Μορμωίς ης f κωι ν.δ.ο. $f(x^3) > f(x^2) \quad \forall x > 1$

(B3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + f(h) - 3}{h}$. (B4) Αν $g \downarrow$ κωι οχης ες $[1, +\infty)$ κωι $1 < g(x) < 2$

Ν.δ.ο. η C_f τέρνι ην C_g σε μωαδικοί οηείο $M(x_0, y_0)$, με $1 < x_0 < 3$

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ηαρ/ηη $x \cdot e^x \geq e^{e \cdot f(e) \cdot x} - 1 \quad (1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) - e^{-x \cdot f(x)} = -x \cdot f'(x) \quad (2), \quad x > 0$

Δίνεζον η οηάρμωη $h(x) = e^{x \cdot f(x)} - x, \quad x > 0$

(Γ1) Ν.δ.ο. $f(e) = \frac{1}{e}$

(Γ2) (α) Ν.δ.ο. h οωαθερή

(β) Ν.δ.ο. $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0$

(Γ3) Αρίθμωσ ης $C_f = ;$

(Γ4) Έστω $M(x, y) \in C_f$

Αν x οωζάνι με ρωμίο 2 cm/sec

να βρήις ρωμίο μερλωλνς τον y η οηηή t_0 οηον $x(t_0) = e$.

Άσκηση:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $A(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ ως προς τη μονοτονία στο $\mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\frac{f^3(2)}{3} + \frac{f^2(2)}{2} + f(2) = \frac{11}{6}$ (1)
Να βρείτε το $f(2)$.

(β) Απάντηση: $f(2) = 1$. α) $A'(x) = x^2 + x + 1$. $\Delta = -3 < 0$
 $\Rightarrow A'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow A(x) \uparrow$ 2ος ορισμός:

(β) (1) $\Rightarrow 2f^3(2) + 3f^2(2) + 6f(2) - 11 = 0 \quad (=)$
 $(f(2)-1) \cdot (2f^2(2) + 5f(2) + 11) = 0$

2	3	6	-11	1
↓	2	5	11	
2	5	11	0	

$f(2) = 1$

$2f^2(2) + 5f(2) + 11 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 11 = 25 - 88 < 0$

$A: \uparrow$
 $(=)$
 $1=1$

$f(2) = 1$

(1) $\Rightarrow A(f(2)) = A(1)$

Θέμα Β: (B1) Π ρινςη καν απκεί:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \text{kan}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -2$$

(B2) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot (x+1) - (x^2 - x + 2) \cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x - 1 - x^2 + x - 2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

Αντικαθιστώντας $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$ διαφ.

$x \in (-1, +\infty)$ $\rightarrow$ $x^2 + 2x - 3$ για $x \in \mathbb{R}$ $\frac{-3}{+1} \frac{1}{-1} +$

$x^2 + 2x - 3$	-	0	+
$(x+1)^2$	+	+	
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

Αντικαθιστώντας $f(x)$ για $x \in (-1, +\infty)$

$\Rightarrow f \searrow$ στο $[-1, 1]$, $f \nearrow$ στο $[1, +\infty)$

Για $x > 1$ ισχύει $x^3 > x^2 \quad \forall x > 1$

$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2} > \frac{x^2}{x^2} \Rightarrow x > 1$ αν ισχύει

Αρα δείχνει $x^3 > x^2 \xrightarrow{+1} f(x^3) > f(x^2)$

$[1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - x + 2}{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = 1 \Rightarrow a = 1$$

B3 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(1+h)] \stackrel{u=1+h}{\underset{u \rightarrow 1}{=}} \lim_{u \rightarrow 1} f(u) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - u + 2}{u + 1} = \underline{1}, \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 2$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) + f(h) - 3}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) + f'(h)}{1} = -3 + 0 = -3.$

$\lim_{h \rightarrow 0} f'(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h - 3}{(h+1)^2} = \frac{-3}{1} = -3.$ $\lim_{h \rightarrow 0} f'(1+h) \stackrel{1+h=u}{\underset{u \rightarrow 1}{=}} \lim_{u \rightarrow 1} f'(u) = \frac{1+2-3}{(1+1)^2} = 0$

B4 Πίνε ε να κεί παραξενεύει: Αλλά να $A_g = [1, +\infty)$ γι' η βχης

το ε να βίω να κεί να βίω να βίω Θ ή να $g(A_g) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1) \right] \stackrel{n.x.}{=} (1, 1.9]$

Θεωρώ να ε ξ βίω να

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \underbrace{f(x) - g(x)}_{A(x)} = 0$

$A(x)$ βχης να $[1, 3]$

$A(1) = f(1) - g(1) = 1 - g(1) < 0$ δίω να $g(x) > 1$

$A(3) = f(3) - g(3) = 2 - g(3) > 0 \Rightarrow g(x) < 2$

Από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists x_0 \in (1, 3): A(x_0) = 0$

$A(x) = f(x) - g(x)$

$f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$, $g \downarrow$ στο $[1, +\infty)$.

Για $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ τέ

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) \quad (1)$$

$$\implies g(x_1) > g(x_2) \implies -g(x_1) < -g(x_2)$$

$$f(x_1) - g(x_1) < f(x_2) - g(x_2)$$

$$A(x_1) < A(x_2)$$

$$\implies A(x) \uparrow \text{ στο } [1, +\infty)$$

Αρα το x_0 που βρήκα είναι μοναδικό.

Κοινωνία 2 εκφωνήσεις.

1η Να δείξετε ότι η εξίσωση
 $A(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0

η οποία ανήκει στο $(1, 3)$

Πρέπει ν.δ.ο. ότι έχει μοναδική ρίζα στο
ηθείο ορισμού της (το οποίο μπορεί να
είναι ευρύτερο του $(1, 3)$, π.χ. το $\mathbb{R}$)
και πράγμα ότι $x_0 \in (1, 3)$.

Πρέπει: Bolzano στο $[1, 3]$ και η μοναδική
στο $\mathbb{R}$

2η ν.δ.ο. η εξίσωση $A(x) = 0$ έχει
μοναδική ρίζα στο $(1, 3)$

Bolzano στο $[1, 3]$, μοναδική στο $[1, 3]$.