

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(1 - e^{-x}) \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1 - e^{-x}}{x} \cdot \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right] = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-x}}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{1} = e^0 = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Aufg. 2 - B04 / $\Sigma \varepsilon \lambda$ 69 / $\Sigma x \rightarrow$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda = \text{Jügel}^T \circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(\sqrt{x^2 + 5x + 10})}_{A(x)} - \lambda x = b \in \mathbb{R} \quad (\Leftarrow)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (A(x) - \lambda x - b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\overbrace{A(x)} - \overbrace{(\lambda x + b)} \right] = 0 \quad \text{mit } \varepsilon \text{ und } \delta: y = \lambda x + b$$

Es von gegebenes $A(x)$ $\rightarrow +\infty$. $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x} = \lambda \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (A(x) - \lambda x) = b \end{array} \right.$

$$\left[x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda \right) \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x + 10}}{x} = \end{array} \right.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x)$ να us διαφορές νηκίς νωρέρ

Λύση: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}\right)} - \lambda x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[|x| \cdot \sqrt{\quad} - \lambda x \right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda \right)}_{A(x)} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 1 - \lambda$$

λ' nξpιντ. $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = +\infty$$

λ' nξpιντ. $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = -\infty$$

λ' nξp. $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$. Πίνω βω αpxίκ

όρ10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 5x + 10 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 5x + 10} + x} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \left(5 + \frac{10}{x}\right)}{\cancel{x} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1\right)} = \frac{5}{2}$$

Μελέτη - γραφική παράσταση:

Παράδειγμα 2: Σ.171

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

$$1) D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

f οχρησ στο D_f συνεχής

2) Πρέπει να ελέγξω αν
η ρίζα του παρονομαστή, είναι
και ρίζα του αριθμητή. Αν συμβεί
αυτό, τότε παραγοντοποιώ και κάνω
απλοποίηση του λόγου ως f

$$(2) f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+4)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

Πάνω μια κορυφή, αν είναι άρτια η περιττή.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + x + 4}{-x-1} = \dots f(x) \text{ είτε } -f(x) \dots \text{ οκ!}$$

3) Λύνω την εξίσωση

$$f'(x) = 0 \quad (=)$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \quad (=)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (=)$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_{1,2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+	+	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	↗	
	T.M.			T.G.		

Αγώ f οχρησ στο $(-\infty, -1]$, $[-1, 1)$, $(1, 3]$, $[3, +\infty)$
 A_1 A_2 A_3 A_4

$f \nearrow$ στο A_1, A_4 , $f \searrow$ στο A_2, A_3

$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{εξετάζω αν } (x-1)^3 > 0 \iff$$

$$x-1 > 0 \iff x > 1$$

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Αφού f έχει σε $(-\infty, 1)$,
 $(1, +\infty)$ είναι $f \curvearrowright$ σε $(-\infty, 1)$
 και $f \curvearrowleft$ σε $(1, +\infty)$
 Δεν έχει β.κ.

Μια βεβαίωση: Το πινάκι που προβήκαμε
 μπορεί να το εμμενίσουμε και κάνοντας χρήση
 του οξέως Bolzano:

Η $f''(x)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σε καμία από
 τα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$, άρα, από οξέος Bolzano,
 διατηρεί πρόσημο σε καμία από αυτές.

$$f''(0) = \frac{8}{(0-1)^3} = -8 < 0, \quad f''(2) = \frac{8}{(2-1)^3} = 8 > 0$$

4) κατασκευάζω πίνακα μεταβολών της f

	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
f'	+	-	-	+	
f''	-	-	+	+	
f					
		τ.μ. -3		τ.ε 5	

$$f(-1) = -3, \quad f(3) = 5$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x-1}$$

ψάχνω να κατακόρυγες ασύμπτωτες ή να
 να $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^2 - x + 4) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - x + 4) = 4$$

$$\text{οπότε: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

Αρα η εωθεα $x=1$ είναι
 κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f
 ψάχνω ποη ηλξισσ-οριζόντιες

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$$

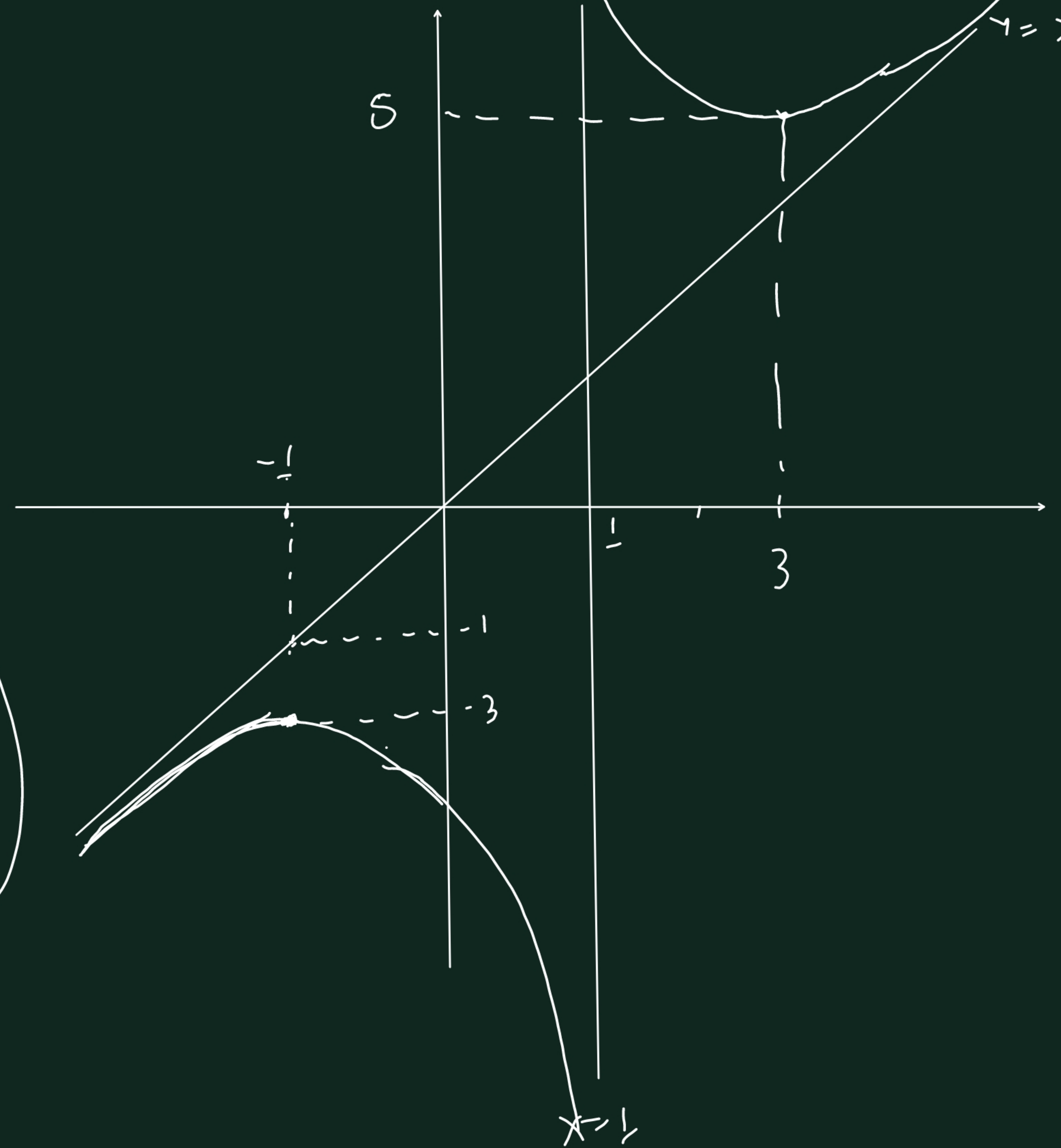
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x} + 4 - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$$

Αρα η εωθεα $\varepsilon: y=x$ ηλξισσ-οριζόντιω
 της C_f $\varepsilon_2 + \infty$

Ομοίως η $\varepsilon: y=x$ ηλξισσ-οριζόντιω της C_f $\varepsilon_2 - \infty$.



$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 1} \quad \text{Να γίνει κλάσμα + γραφ. παράσταση}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 - x^2 - x}{x + 1} = -6$$

$$y = x - 6$$

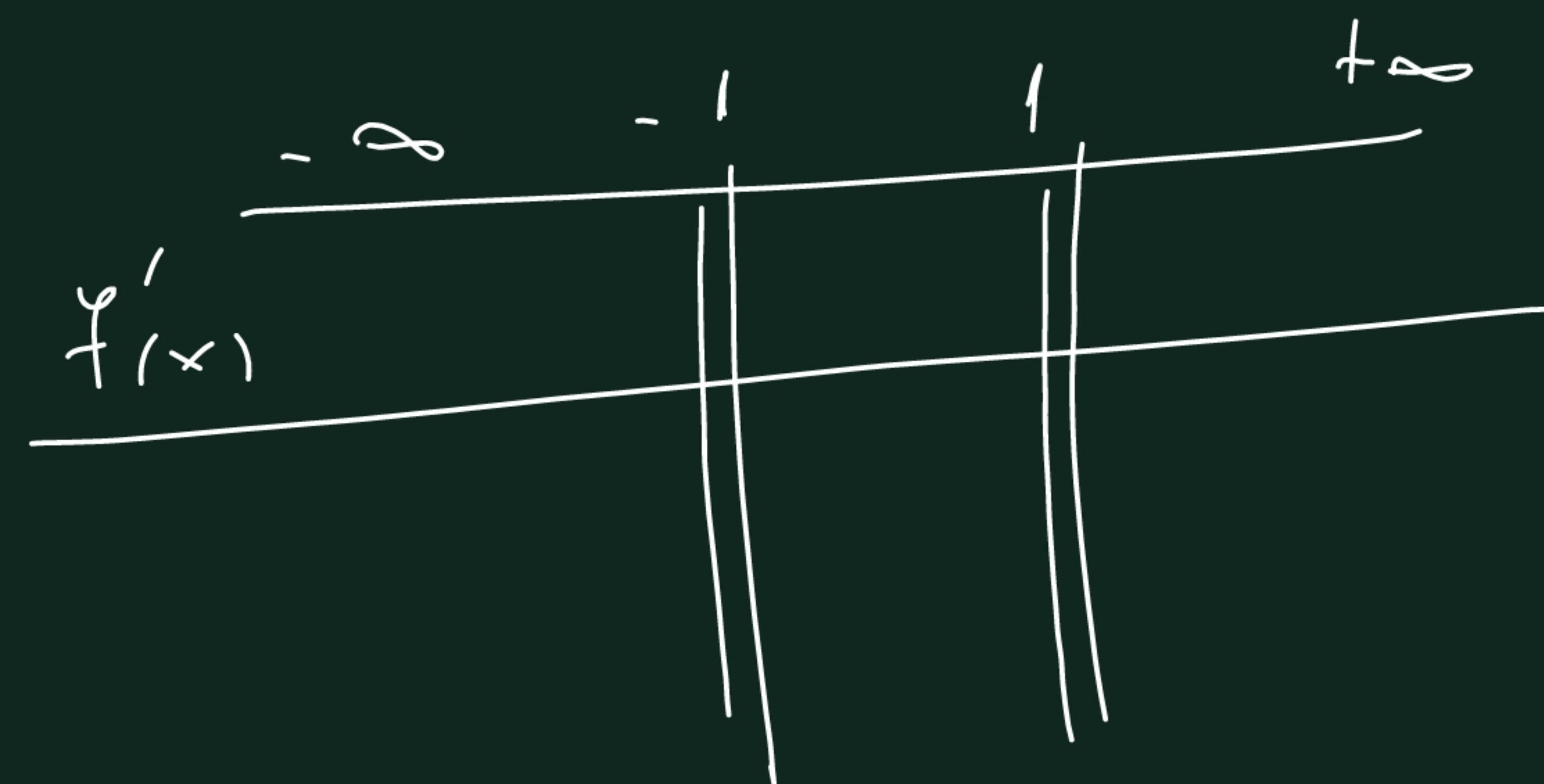
$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad \text{ΟΧΗΣ και ορίζ.}$$

Ελέγχω ~ 1 και να παραμένει.

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 12 - 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -6 & 11 & -6 & 1 \\ \downarrow & & & & \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-5x+6}{x+1}$$



$$f(x) = x + \cos x, \quad x \in [-n, n] = D_f$$

$$f'(x) = 1 - \sin x, \quad f''(x) = -\cos x$$

Λίμνη $\{1, 6, 2, 1\}$

$$1 - \sin x = 0$$

$$-\cos x = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$x = 0, n, -n$$

$$x = -\frac{n}{2}$$

	$-n$	$-\frac{n}{2}$	n
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$			

x_1, x_2

$$f'(-n - \frac{n}{6}) = \dots$$

$$\cos x > -1$$

$$\cos x + 1 > 0$$

$$f \text{ είναι στο } [-n, n] \Rightarrow f \uparrow \text{ στο } [-n, n]$$

	$-n$	0	n
$f''(x)$	0	$+$	0
$f(x)$			

$$G_k. \\ f(0) = 0$$

Από $n \neq 0$ δεν υπάρχει
 δέν έχει καμπύλες
 δέν έχει καμπύλες.
 Απο $n \neq 0$ δεν υπάρχει
 δέν έχει καμπύλες.
 Απο $n \neq 0$ δεν υπάρχει
 δέν έχει καμπύλες.

