

Θέτα Β [B1] $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f'(x) = -\frac{(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2} = -\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2} > 0$

Γενικά $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ Άρα f αυξάνεται.

Θα βρω το $f(A) = f(1, +\infty)$.

Άρα f έχει στο A τον $\uparrow \Rightarrow f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-\sqrt{x}} = -\infty$, $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 1 \Rightarrow 1-\sqrt{x} < 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\sqrt{x}} = 0$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-\sqrt{x}) = -\infty$. Άρα $f(A) = (-\infty, 0)$

Το σύνολο τιμών της f είναι το α.σ. της f^{-1} .

Για να βρω τις f^{-1} , λύνω με εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x .

$\frac{1}{1-\sqrt{x}} = y \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow -\sqrt{x} = \frac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^2$

$\Leftrightarrow x = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2$. $f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y}\right)^2$, $y < 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$, $x < 0$.

[B2] $D_{g \circ f^{-1}} = \left\{ x \in D_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in D_g \right\} = (-\infty, 0)$
 $x < 0 \quad \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0$

$h(x) = g(f^{-1}(x)) = g\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\right) = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{x-1}{x}$

Διότι $x < 0 \Rightarrow x-1 < -1 < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0$

Θέτα Β [B3] $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x-1}{x} \right) = +\infty \Rightarrow$ Η ευθεία $x=0$ (αξονίστη) αποτελεί ασύμπτωτη της C_f

$x < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1 < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \text{οριζόντια ασύμπτωτη με ευθεία } y=1$$

B4 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-h(x)} \cdot \ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-\frac{x-1}{x}} \cdot \ln \frac{1}{x} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{x-1}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \quad 0 \cdot \ln \infty$$

$$\left| e^{-\frac{x-1}{x}} \cdot \ln \frac{1}{x} \right| = \left| e^{-\frac{x-1}{x}} \right| \cdot \left| \ln \frac{1}{x} \right| \leq \left| e^{-\frac{x-1}{x}} \right| \cdot \text{Αρα } \left| e^{-\frac{x-1}{x}} \cdot \ln \frac{1}{x} \right| \leq \left| e^{-\frac{x-1}{x}} \right|$$

$$-\left| e^{-\frac{x-1}{x}} \right| \leq e^{-\frac{x-1}{x}} \cdot \ln \frac{1}{x} \leq \left| e^{-\frac{x-1}{x}} \right| \quad \text{Από κριτήριο οδρεβόβιτς} \dots$$



Διαγ. προβ 2024

Θέμα Γ $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax + b, & x \leq 3 \\ x^2 - 10x + 22, & x > 3 \end{cases}$ Εφαρμογή του 20 ΘΜΤ
στο $[2, 8]$

Γ1) Αφού Εφαρμογή του 20 ΘΜΤ στο $[2, 8]$, $\rightarrow f$ συνεχ στο $[2, 8]$
και f παραγωγ στο $(2, 8)$.

Επειδή στο $(2, 3)$, $(3, 8)$ είναι συνεχ & παραγωγ $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 4, & x \leq 3 \\ x^2 - 10x + 22, & x > 3 \end{cases}$
 f συνεχ στο 3 $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$

όπως $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -9 + 3a + b$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9 - 30 + 22 = 1 \Rightarrow$
 $-9 + 3a + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -3a + 10}$

πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{L_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{L_2}$

$L_1 = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 + ax + b - (-9 + 3a + b)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 + ax + b + 9 - 3a - b}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 + ax + 9 - 3a}{x - 3}$

$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x + a}{1} = -6 + a$. $L_2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 10x + 22 - (-9 + 3a + b)}{x - 3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 10}{1} = -4$

πρέπει $-6 + a = -4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$ $b = -3 \cdot 2 + 10 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x < 3 \\ -4, & x = 3 \\ 2x - 10, & x > 3 \end{cases}$

πρέπει να λείπει η εξίσωση
 $f'(x) = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2} = \frac{6 - 4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$f(8) = 64 - 80 + 22 = 6$

$f(2) = -4 + 4 + 4 = 4$