6ο Θέμα ΕΜΕ 2018

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}-e^t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(x+1)e^x\cdot e^t+1}{\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}+e^t}=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t\cdot\left((x+1)\cdot e^x+\frac{1}{e^t}\right)}{e^t\sqrt{1+(x+1)\cdot\frac{e^x\cdot e^t}{e^{2t}}+\frac{1}{e^{2t}}}+e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\cancel{e^t}\left[(x+1)\cdot e^x+\frac{1}{e^t}\right]}{\cancel{e^t}\cdot\left[\sqrt{1+\frac{x+1}{e^t}+\frac{1}{e^{2t}}}+1\right]}$$

$$=\frac{(x+1)\cdot e^x}{\sqrt{1}+1}=\frac{x+1}{2}e^x.$$

Έχω $\frac{f'(x)}{\cancel{2}(x+1)}=\frac{x+1}{\cancel{2}}\cdot e^x$, $x\neq-1$

$\Leftrightarrow f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$ (*), $x\neq-1 \Leftrightarrow f'(x)=(x^2+2x+1)\cdot e^x \Leftrightarrow$

$f'(x)=(x^2+1)\cdot e^x+2x\cdot e^x \Leftrightarrow f'(x)=(x^2+1)(e^x)'+(x^2+1)'\cdot e^x=\left[(x^2+1)\cdot e^x\right]'$

(*) 2ος τρόπος: Θεωρώ $A(x)=(x^2+1)\cdot e^x$. $A'(x)=(x^2+1)'\cdot e^x+(x^2+1)(e^x)'=2x\cdot e^x+(x^2+1)e^x=(x+1)^2e^x$ $= f'(x)$

$f'(x)=\left[(x^2+1)\cdot e^x\right]'$, $x\neq-1 \Rightarrow$

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+1)\cdot e^x+c_1, & x>-1\\ \frac{2}{e}, & x=-1\\ (x^2+1)\cdot e^x+c_2, & x<-1\end{cases}$$

Αφού f παρ/μη $\Rightarrow$ συνεχής $\Rightarrow \lim_{x\to-1^-}f(x)=\frac{2}{e}=\lim_{x\to-1^+}f(x)$

$((-1)^2+1)\cdot e^{-1}+c_1=\frac{2}{e} \Leftrightarrow$

$\frac{2}{e}+c_1=\frac{2}{e}$

$c_1=0$.

Ομοίως $c_2=0$

Άρα $f(x)=(x^2+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$

$f(-1)=((-1)^2+1)e^{-1}=2e^{-1}=\frac{2}{e}$

(B) $f'(x)=(x+1)^2\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Αφού f συνεχής στο -1

$\Rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$

6ο Θέμα ΕΜΕ 2018

(β) $\lim_{x\to-\infty}\left[(x^2+1)\cdot e^x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{e^{-x}}\right) \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0$

$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^2+1)\cdot e^x\right] = +\infty$. Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\nearrow$ $\longrightarrow$

$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$. ο.ε.δ.

γ) $f'(x) = (x+1)^2\cdot e^x \longrightarrow f''(x) = 2(x+1)\cdot e^x + (x+1)^2\cdot e^x = e^x\cdot(x^2+4x+3)$

	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
x^2+4x+3	+	0 −	0 +	
$f''(x)$	+	−	+	
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	
		Σ.Κ.	ΣΚ	

$f(-3) =$

$f(-1) =$

(δ) $f(x)\cdot(x+1) \le f(x^2) + 2ex, \quad x \geq 1$ (1)

Η μέθοδος της εφαρμογής "αθροιστική" αφού η f υπάρχει με 2 ορίσματα. x^2, x.

$x\cdot f(x) + f(x) \le f(x^2) + 2ex \Leftrightarrow x\cdot(f(x) - 2e) \le f(x^2) - f(x)$

Για $x > 1$ έχω $x^2 > x \Rightarrow x^2 - x > 0$ $\Leftrightarrow \frac{\cancel{x}\cdot(f(x)-2e)}{\cancel{x}(x-1)} \le \frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}$

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \le \frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}$ (2)