

αλμ. 2-Β'ΟΜ / Σελ. 190

x χιλ. ευρώ

κέρδος $P(x)$ χιλ. ευρώ

$$P'(x) = 5,8 \cdot e^{-x/2000}$$

κέρδος που οφείλεται

σε αύξηση παραγωγής

4.000.000 σε 6.000.000 €

Μια παράσταση να $e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

$$e^{-3} - e^{-2} = \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^2} = \frac{1-e}{e^3} < 0$$

Αν επενδύσει 4.000.000 ευρώ τότε το κέρδος

που οφείλεται, δ' αυτήν την επένδυση θα είναι $P(4.000)$

Ομοίως, αν επενδύσει 6.000.000 € τότε κέρδος $P(6.000)$.

Ζητάμε να βρούμε το $P(6.000) - P(4.000) = A$.

Αφού $P'(x) = 5,8 \cdot e^{-x/2000}$, $x \geq 0$

$$\text{Τότε } P(x) = 5,8 \cdot \left(-\frac{1}{\frac{1}{2000}} \right) \cdot e^{-x/2000} + C =$$

$$= -5,8 \cdot 2000 \cdot e^{-x/2000} + C$$

$$A = -5,8 \cdot 2000 \cdot e^{-6000/2000} + 5,8 \cdot 2000 \cdot e^{-4000/2000} =$$

$$= -5,8 \cdot 2000 \cdot (e^{-3} - e^{-2}) \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

an. 4-BOM / Σ. 191

$$f(0) = g(0)$$

$$f(1) = g(1) + 1$$

$$f''(x) = g''(x), x \in \mathbb{R}$$

i) N.S.O. $f(x) = g(x) + x, x \in \mathbb{R}$

ii) A.H. $g(x) \in X_{\Sigma} \geq \text{eifrs}$

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < 0 < b$

$\exists \varepsilon > 0 \quad f \in X_{\Sigma} \quad \text{pifrs } a_0(a, b)$

(i) $f''(x) = g''(x), x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = g'(x) + c, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (g(x) + c \cdot x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = g(x) + cx + c_1, x \in \mathbb{R}$$

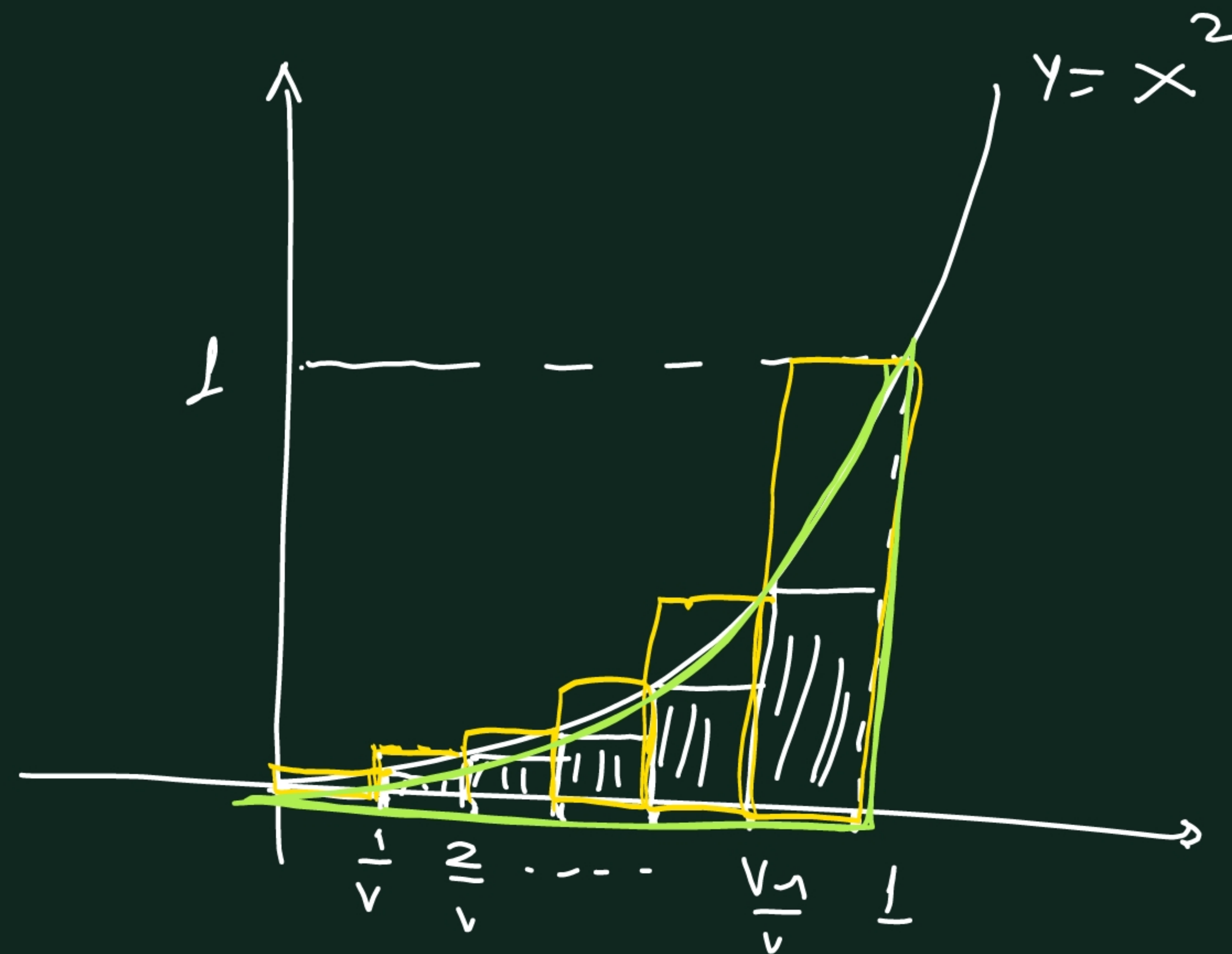
Apa $f(0) = g(0) \Rightarrow \cancel{f(0)} = \cancel{g(0)} + \cancel{c \cdot 0} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$

Apa $f(x) = g(x) + c \cdot x \mid \Rightarrow f(1) = g(1) + c \cdot 1 \neq 1$

Apa $f(1) = g(1) + 1 \Rightarrow \cancel{g(1)} + 1 = \cancel{g(1)} + c \neq 1$
 $c = 1$

$\Rightarrow$ Apd $f(x) = g(x) + x, x \in \mathbb{R}$.

$\text{για } x=a \Rightarrow f(a) = \cancel{g(a)} + a \Leftrightarrow f(a) = a$
 $\text{για } x=b \Rightarrow f(b) = \cancel{g(b)} + b \Leftrightarrow f(b) = b$
 $\left. \begin{array}{l} f(a) = a \\ f(b) = b \end{array} \right\} \Rightarrow f(a) \cdot f(b) = a \cdot b < 0, \text{ για } a, b \in \mathbb{R} \text{ με } a < 0 < b$
 $\Rightarrow \text{αν } a, b \in \mathbb{R} \text{ με } a < 0 < b \text{ και } a \cdot b < 0 \Rightarrow \exists \text{ pifrs } a_0(a, b)$



Διαιρέσεις του διαστήματος $[0, 1]$

$$\left[0, \frac{1}{v}\right], \left[\frac{1}{v}, \frac{2}{v}\right], \left[\frac{2}{v}, \frac{3}{v}\right], \dots, \left[\frac{v-1}{v}, \frac{v}{v}\right]$$

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_v = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \bar{\mathcal{E}}_v = \frac{1}{3}$$

Ορισμός ορισμών ολοκληρώματος:

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b] = \Delta$

Θεωρούμε διαιρέσεις σε v ίσα διαστήματα του Δ
 $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3] \dots [x_{v-1}, b]$

όπου $x_1 = a + \frac{b-a}{v}$, $x_2 = a + 2 \frac{b-a}{v}$, $\dots$, $x_k = a + k \frac{b-a}{v}$

Θεωρούμε οποιαδήποτε σημεία ξ_k που ανήκουν
 στα διαστήματα της διαιρέσεως:

$$\xi_1 \in [a, x_1], \xi_2 \in [x_1, x_2] \dots \xi_v \in [x_{v-1}, b]$$

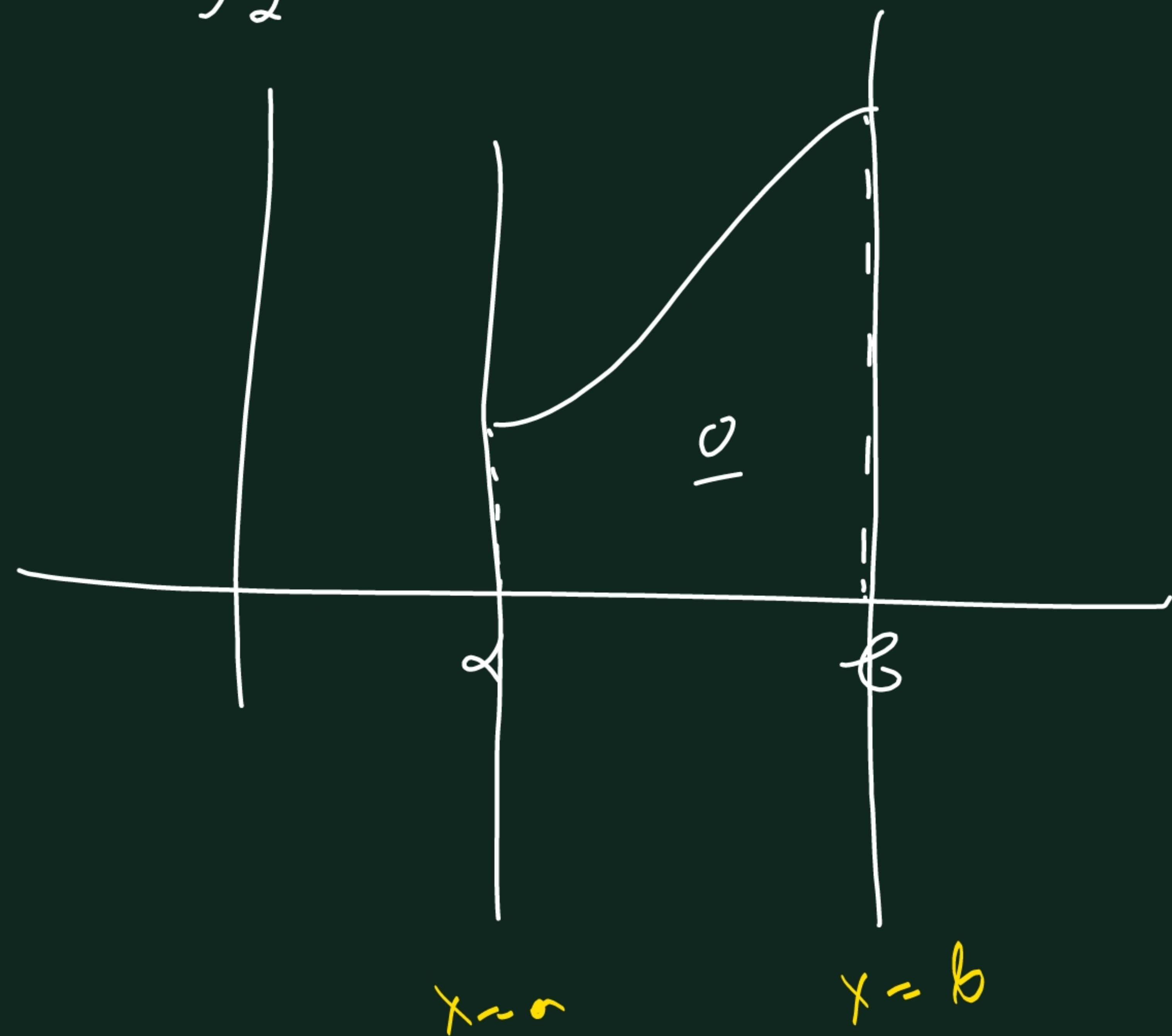
τότε θεωρούμε το άθροισμα

$$S_v = \frac{b-a}{v} \left[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_v) \right]$$

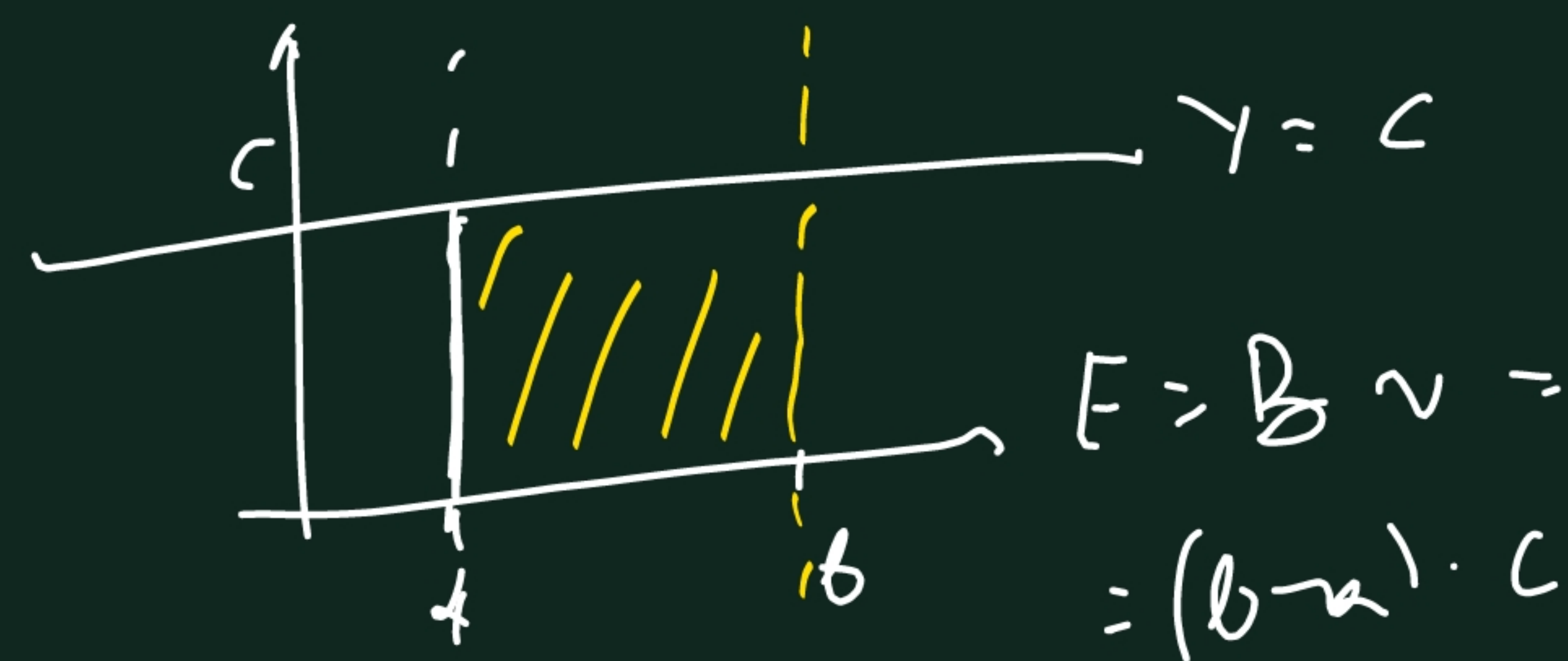
Το $\lim_{v \rightarrow +\infty} S_v$ ονομάζεται ορισμός ολοκληρώματος της f
 και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x) dx$

Αν ενοχλῶν $f(x) \geq 0$ στὸ $[a, b]$ τότε ἰδιότητες τῶν ολοκληρωμάτων

2) $\int_a^b f(x) dx = E$ στὴν περίπτωση $\frac{0}{0}$ 1) Αν $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$



2) Αν $f(x) \geq 0$ καὶ $\exists \xi \in [a, b]$ μὲς $f(\xi) \neq 0$
τότε $\int_a^b f(x) dx > 0$



3) $\int_a^b c dx = c \cdot (b-a)$

4) $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$

5) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

6) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$



7) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

A6 k.1 / ΣΕλ. 215 / Σχολ. κ.

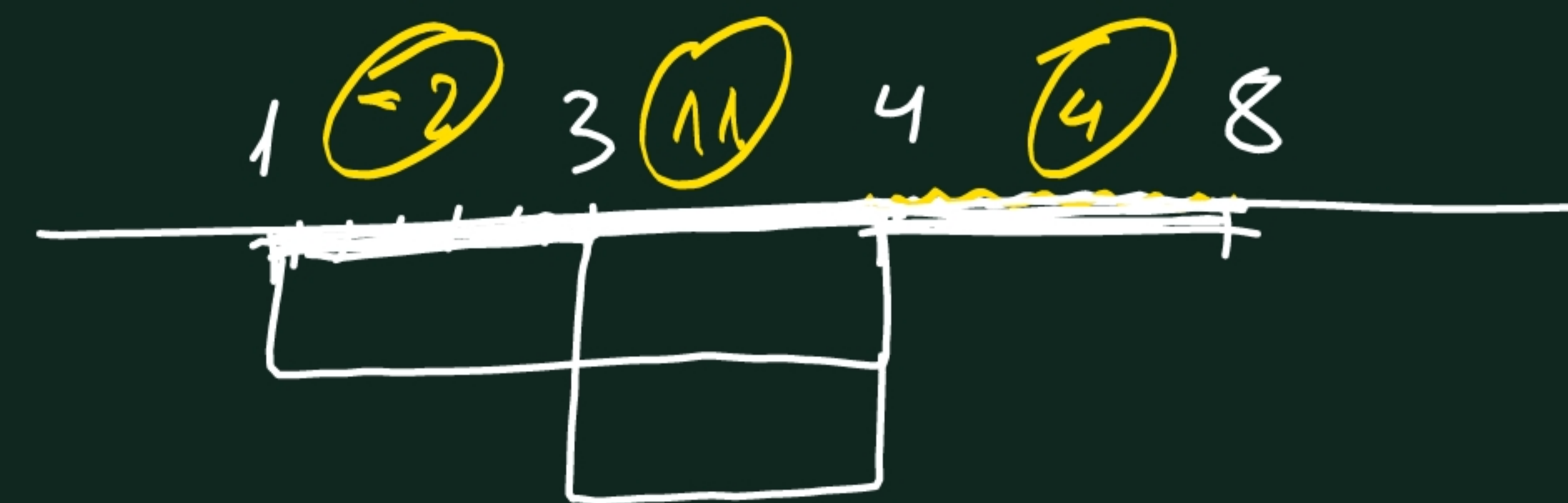
$$\int_1^4 f(x) dx = 9, \quad \int_3^4 f(x) dx = 11, \quad \int_1^8 f(x) dx = 13$$

$$i) \int_4^3 f(x) dx = - \int_3^4 f(x) dx = -11$$

$$ii) \int_4^8 f(x) dx = 4$$

$$iii) \int_1^3 f(x) dx = -2$$

$$iv) \int_3^8 f(x) dx = 11 + 4 = 15$$



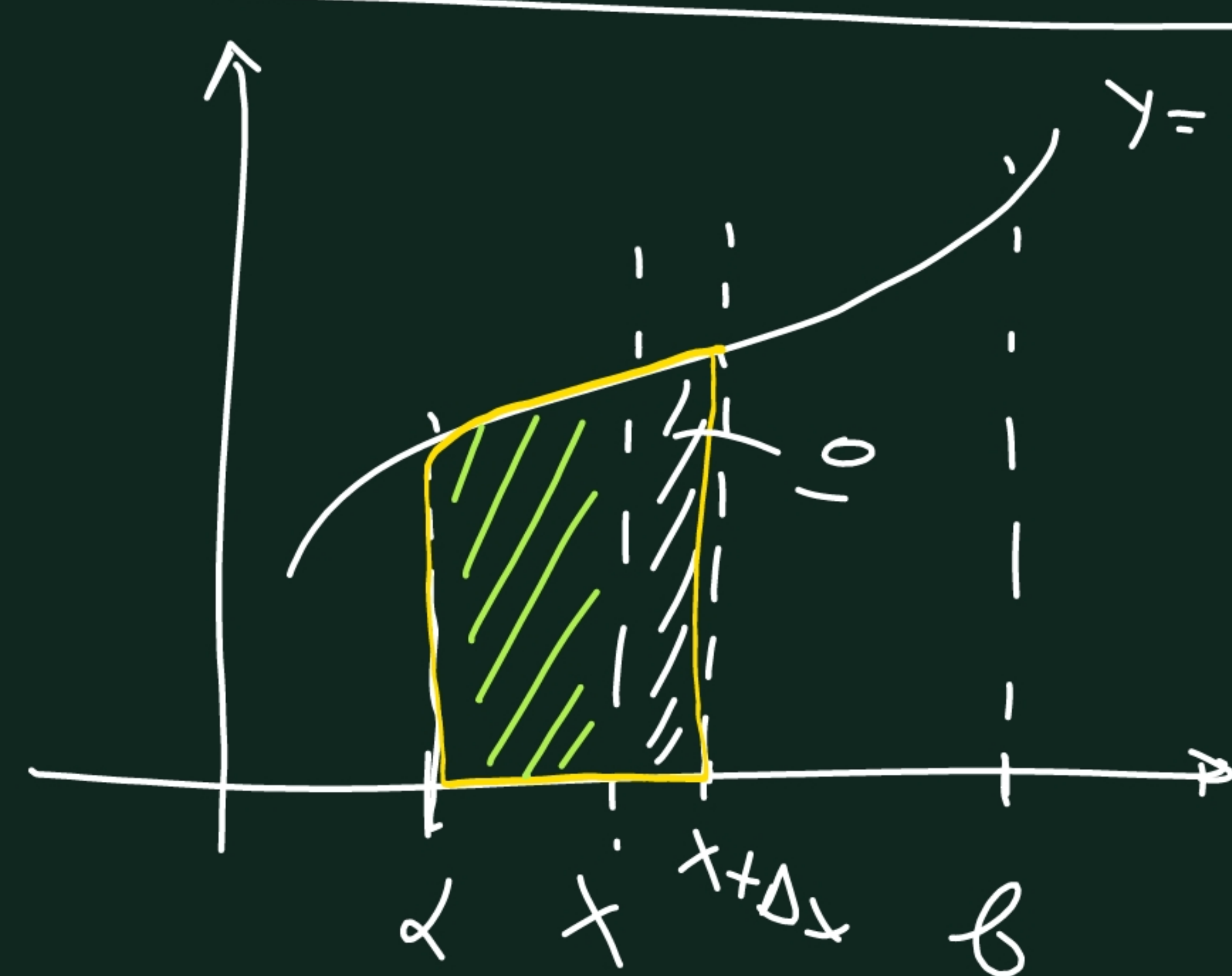
$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^4 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx = \\ &= 9 - 11 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_4^8 f(x) dx &= \int_1^8 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx = \\ &= 13 - 9 = 4 \end{aligned}$$

Абн. 3 / Заг. 215

$$\int_1^k \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} dx - \int_k^1 \frac{5}{x^2 + 1} dx = \int_1^k \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} dx + \int_1^k \frac{5}{x^2 + 1} dx = \int_1^k \frac{x^2 - 4 + 5}{x^2 + 1} dx$$

$$= \int_1^k \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int_1^k 1 dx = 1 \cdot (k - 1) = k - 1$$



$y = f(x)$ 'Эсв f $G(x)$ $on [a, b]$

$$E(\xi) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt$$

$$Opi \int_a^x f(t) dt = F(x)$$

$$= F(x + \Delta x) - F(x) \approx E(\xi) = \Delta x \cdot f(x)$$

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

$$F'(x) = f(x)$$

$\Delta m \lambda$. $F(x)$ hva $napayaca$ $ms f$.

Θεμελιώδες Θεώρημα τα Ολοκληρωτικοί Λογισμοί.

Αν f είναι στο $[a, b]$ και $F(x)$ μια παράγουσα της f

$$\text{Τότε} \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$$
