Αν f', g' είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)\,dx$

<u>Μορφές εφαρμογής:</u>

1) $\int P(x)\cdot e^x\,dx$

2) $\int P(x)\cdot ημx\,dx$

3) $\int P(x)\cdot \ln x\,dx$

4) $\int e^x\cdot ημx\,dx$

$$I = \int_0^{\pi/6} e^x\cdot ημx\,dx = \int_0^{\pi/6} (e^x)'\cdot ημx\,dx =$$

$$[e^x ημx]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} e^x\cdot συνx\,dx =$$

$$e^{\pi/6}\cdot ημ\frac{\pi}{6} - \cancel{e^0 ημ0} - \int_0^{\pi/6} (e^x)'\cdot συνx\,dx =$$

$$\frac{e^{\pi/6}}{2} - \left\{ [e^x\cdot συνx]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} e^x\cdot(-ημx)\,dx \right\} =$$

$$\frac{e^{\pi/6}}{2} - [e^x\, συνx]_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} e^x\cdot(-ημx)\,dx$$

$$\frac{e^{\pi/6}}{2} - e^{\pi/6}\cdot συν\frac{\pi}{6} + e^0\cdot συν0 - \underbrace{\int_0^{\pi/6} e^x\, ημx\,dx}_{I} = \frac{1}{2}e^{\pi/6} - \frac{\sqrt{3}e^{\pi/6}}{2} + 1 - I$$

Άρα $\underbrace{I}_{} = \frac{1}{2}e^{\pi/6} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/6} + 1 - \underbrace{I}_{} \iff 2I = \frac{1}{2}e^{\pi/6} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\pi/6} + 1$

$$\int_1^e e^x \cdot \ln x \, dx = \int_1^e (e^x)' \cdot \ln x \, dx = \left[e^x \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e e^x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

Θεώρημα: Ολοκλήρωση με αντικατάσταση: [Σύνθετη συνάρτηση].

$$\int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \left[F(x)\right]_{g(\alpha)}^{g(\beta)}$$

$F(x)$ μια παράγουσα της f

Πράξη.

Για να υπολογίσω $I = \int_\alpha^\beta f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx$

Θέτω $u = g(x)$, $g'(x) \cdot dx = du$

x	α	β
u	$g(\alpha)$	$g(\beta)$

$$I = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u) \, du = \left[F(x)\right]_{g(\alpha)}^{g(\beta)}$$

Άσκ. 3 / Σελ. 198

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cdot ημ e^x \, dx = \int_1^{e^{\pi/2}} ημ u \, du = -\left[συν u\right]_1^{e^{\pi/2}}$$

Θέτω $u = e^x$

$(e^x)' = e^x$

$du = (e^x)'dx = e^x dx$

x	0	$\pi/2$
u	1	$e^{\pi/2}$

(ii) $I = \int_0^{\pi/6} \frac{e^x}{e^x+1} dx$

Παρονομαστής $\Longleftrightarrow$ σύνθετη συνάρτηση

$(e^x+1)' = e^x$

Θέτω $u = e^x + 1$. $du = (e^x+1)'du$
$= e^x \cdot dx$

x	0	$\pi/6$
u	2	$e^{\pi/6}+1$

$$I = \int_2^{e^{\pi/6}+1} \frac{1}{u} du = \left[\ln|u|\right]_2^{e^{\pi/6}+1}$$

$$\int_2^e \frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}\,dx = I$$

Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$

ορίζεται αν $x \neq 0$, $\ln x > 0 \iff$

$\ln x > \ln 1 \iff$

$x > 1$

$\Rightarrow D_f = (1, +\infty)$.

Θέτω $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

x	2	e
u	$\ln 2$	1

$$I = 2\int_{\ln 2}^{1} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \left[2\cdot\sqrt{u}\right]_{\ln 2}^{1}$$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[2, e]$ άρα ολοκληρώσιμη

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$I=\int_{\ln 2}^{1}\frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)}\,dx$$

Η $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)\cdot\ln(e^x+1)}$

έχει π.ο.

$e^x+1\neq 0$, $e^x+1>0$, $\ln(e^x+1)\neq 0$

ισχύει ισχύει

$\ln(e^x+1)\neq \ln 1$

$e^x+1\neq 1 \Leftrightarrow e^x\neq 0$

ισχύει

Άρα $D_f=\mathbb{R}$.

Η f συνεχής στο $[\ln 2, 1] \Rightarrow$ ολοκληρώσιμη.

$(e^x+1)'=e^x$

Θέτω $u=e^x+1$.

$du=(e^x+1)'dx=e^x dx$.

x	$\ln 2$	1
u	3	$e+1$

Άρα $I=\displaystyle\int_3^{e+1}\frac{1}{u\cdot\ln u}\,du=\int_3^{e+1}\frac{(\ln u)'}{\ln u}\,du$

$=\Big[\ln(\ln u)\Big]_3^{e+1}$

2ος τρόπος

Θέτω $w=\ln u$

$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}$

$$\int_{\frac{6}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{x}\,dx = -\int_{\frac{6}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} x \cdot \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{-x^2}\,dx = \int \frac{\eta\mu\, u}{u}\,du$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$