

Θεώρημα (Ανισότητα 1^ο). Αν f συνεχής στο $[a, b]$ και $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$
τότε $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

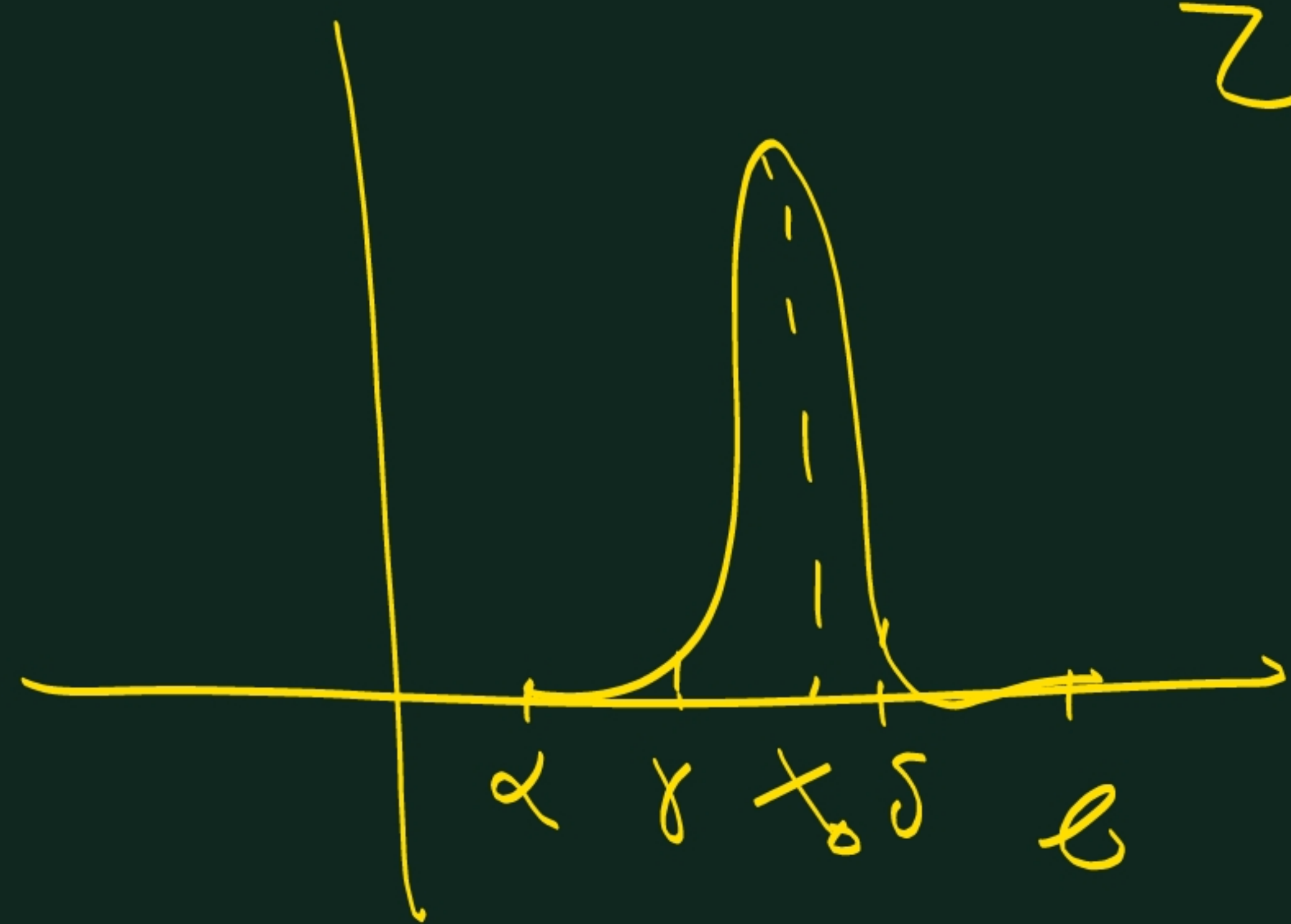
Θεώρημα (Ανισότητα 2^ο). Αν f συνεχής στο $[a, b]$ και $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$
και $\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) > 0$ τότε $\int_a^b f(x) dx > 0$.

Επίκρουμα 2^ο Αν $f(x) \geq 0, f(x_0) > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$

Τότε $f(x) > 0$ κοντά στο $x_0 \Rightarrow$

υπάρχουν δ, δ κοντά στο $x_0: f(x) > 0 \quad \forall x \in [\delta, \delta]$

$$\text{Τότε } \int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^{\delta} f(x) dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\delta}^{\delta} f(x) dx}_{> 0} + \underbrace{\int_{\delta}^b f(x) dx}_{\geq 0} > 0$$

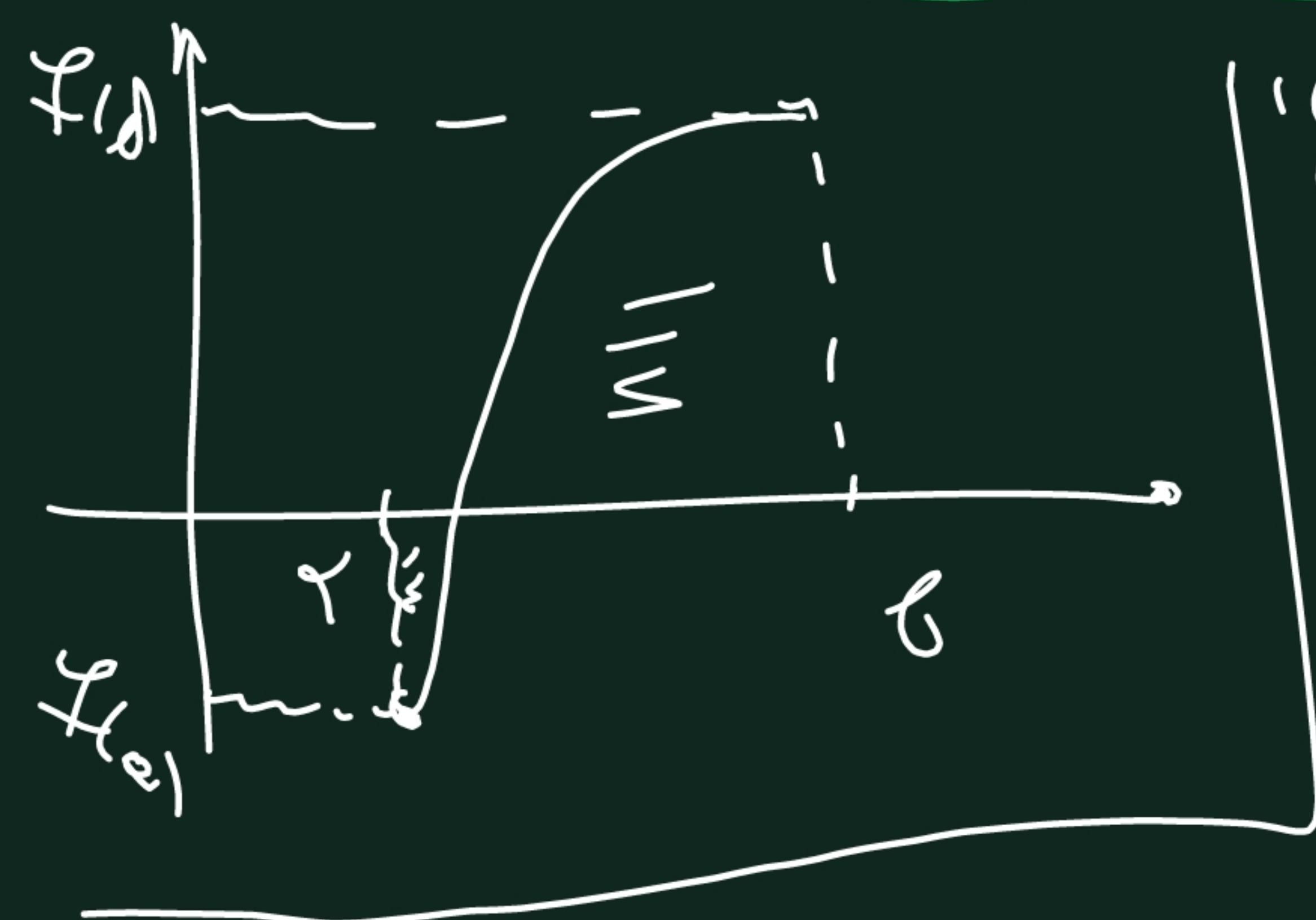


Συνέπειες του θεωρήματος Δευτέρου.

1) Αν f συνεχής στο $[a, b]$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ και $\int_a^b f(x) dx > 0$ τότε
 $\exists x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) > 0$ [$f(x_0) \neq 0$] (ή $f(x)$ δεν μηδενίζεται σε
οποδήποτε $\subset [a, b]$)

Αντίθεση: Έστω f συνεχής στο $[a, b]$,
 $f(a) < 0$ και $\int_a^b f(x) dx > 0$. Να δ.ο. $\exists x_0 \in [a, b]$ με $f(x_0) = 0$.

Σκέψη: Θα υπάρχει $x_1 \in (a, b)$ ώστε $f(x_1) > 0$. Θα εργαστώ με
αναγωγή σε άτοπο.



Έστω $\forall x \in [a, b]$, ισχύει $f(x) \leq 0$. Επειδή $f(a) < 0$.

Από 2^ο αναγωγικό θεώρημα $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx < 0$. Άτοπο.

Άρα $\exists x_1 \in (a, b)$ ώστε $f(x_1) > 0$. Βολζονο στο $[a, x_1]$...

Άσκηση: Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\int_0^1 f^2(x) dx + \frac{1}{3} \leq 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx$ (1)

Να βρείτε την $f(x)$ στο $[0,1]$.

Λύση $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$$\int_0^1 (f^2(x) - 2x \cdot f(x)) dx + \frac{1}{3} \leq 0$$

Θα ισχύει: $\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx \leq 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (f^2(x) - 2x \cdot f(x) + x^2) dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - x)^2 dx \leq 0$$

Ισχυρισμός: $f(x) - x = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Αντίθετα, να ισχυριστούμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) - x_0 \neq 0$

Τότε $(f(x_0) - x_0)^2 > 0$. Από 2° ελάχιστο διαιρετικό, και αφού $(f(x) - x)^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

θα ισχύει $\int_0^1 (f(x) - x)^2 dx > 0$. Άρα $f(x) = x, x \in [0,1]$.

Πρόβλημα 1: $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε έχει το πολύ 3 κλειστά σημεία.

Πρόβλημα 2: $A \subseteq \mathbb{R}$ 2-1-1, αλφ/μν στο $\mathbb{R}$ και 1-1 τότε έχει το πολύ 3 κλειστά σημεία.

Πρόβλημα 3:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq 0 \\ f_2(x), & x > 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{επιπλέον, } \text{όχι αλφ/μν στο } x_1 = 0 \\ \text{αλλά συνεχ στο } x_1 = 0 \\ \text{επιπλέον } f_1(x) \uparrow \text{ στο } (-\infty, 0] \\ f_2(x) \uparrow \text{ στο } [0, +\infty) \end{array} \right.$$

Ερώτηση: Όσοι κλειστά σημεία έχουν, $\forall x \in \mathbb{R}$;

Απάντηση: "Όσα θέλεις".

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x - \eta_1 x, & x > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} f \uparrow \text{ στο } (-\infty, 0] \\ \text{συνεχ στο } x_0 = 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \quad \left| \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \right.$$

$$\text{f.12 } x > 0 \quad f(x) = x - \ln x$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x > 0$$

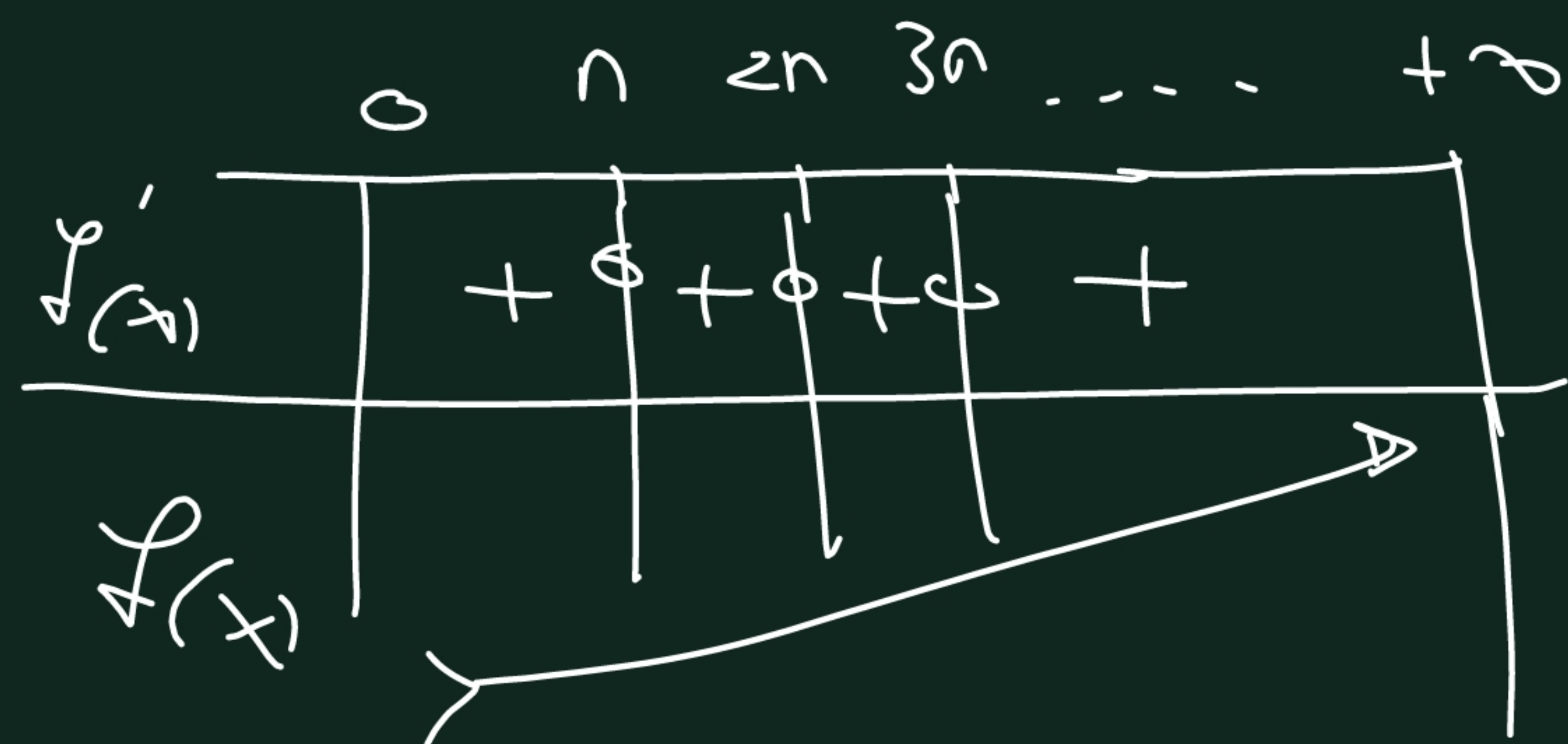
$$\text{H } \exists \xi \in (0, \infty) \quad f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{1}{\xi} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\xi} = 1$$

$$x = kn, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{και } \xi_1 \in \xi, \quad \xi_2 \in \xi,$$

$\Rightarrow$ Ανελιξη κριση ενταξη



$$\text{Σελ. 235 / 26.10 / Σχολια b, b2io.}$$

(ii) Αν f εχης στο $[a, b]$ και $m = f_{\min}$

$$M = f_{\max} \quad \text{τοτε}$$

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Αποδειξη: Ανιψη: Αν f, g εχης στο $[a, b]$

$$\text{με } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{Αποδειξη } f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0, \text{ και } \int_a^b$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Aufgaben zur 2. Klausur

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{dann } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx$$

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\int_a^b m dx = \int_a^b mx dx = mb - ma$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} - e^x - \cancel{e^{2x}} - 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0 \quad \forall x > 0$$

$\Rightarrow (f \circ g)' < 0$ auf $(0, +\infty)$ ist 1-1 =, also bijektiv

Aufgabe B (2020)

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x$$

$$\textcircled{B_1} (f \circ g) \quad D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = (0, +\infty)$$

$x \in \mathbb{R} \quad e^x > 1 \iff x > 0$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, \quad x > 0$$

$$\textcircled{B_2} (f \circ g)'(x) = \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right)' = \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - (e^x + 2) \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right) \stackrel{\text{g.w.}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

oder $x \rightarrow +\infty \approx n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(e^x + 2) \cdot \frac{1}{e^x - 1} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) = 3. \quad x > 0 \Rightarrow e^x \rightarrow e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

Is bijection nimm wir als $(f \circ g)$. Es existiert
 $f \circ g \downarrow$ kann existieren aus $(0, +\infty)$ und

$$\text{Existenz } (f \circ g)(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) \right) = (1, +\infty).$$

$$\text{Es gilt } \frac{x}{h}$$

Nun wir zeigen: $(f \circ g)(x) = y$ was nach x .

$$\frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow$$

