2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(1-e^x)-\ln(1+e^x)$.

**E1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

**E2.** Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της f.

**E3.** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f.

**E4.** Να βρείτε την αντίστροφη της f.

**E5.** Βρείτε το $m<0$ ώστε $f(m)=m$.

**E6.** Αν $g(x)=f(x)-x,\ \ x<0$, να βρείτε τη μονοτονία της $g(x)$.

**E7.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x)-f(-1)<x+1$.

**E8.** Αν $h(x)=-\ln(-x)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(c)=h(c)$.

E1

$1-e^x>0 \iff$ $\qquad$ $1+e^x>0$ ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}$

$-e^x>-1 \iff$

$e^x<1 \iff x<0$

$D_f=(-\infty,0)$.

E2 Λύνω την ανίσωση

$f(x)>0 \iff$

$\ln(1-e^x)-\ln(1+e^x)>0 \iff$ $\ln x \uparrow$

$\ln(1-e^x)>\ln(1+e^x) \iff$

$\cancel{1}-e^x>\cancel{1}+e^x \iff 0>2e^x \iff$ αδύνατη.

Άρα $f(x)<0\ \ \forall x\in(-\infty,0)$

E3 $f\downarrow$ στο $(-\infty,0)$.

E4 Το Π.Ο. της $f^{-1}$ είναι το σύνολο τιμών της f. $A(-\infty,0)$.

f συνεχής και $\downarrow$ στο $A \Longrightarrow f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^-}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big[\underbrace{\ln(\underbrace{1-e^x}_{1})}_{=0} - \underbrace{\ln(\underbrace{1+e^x}_{1})}_{=0}\Big] = 0.$$

Διότι $\lim_{x\to-\infty}(1-e^x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left[\ln(1-e^x)\right] \underset{u\to 1}{\overset{1-e^x=u}{=\!=}} \lim_{u\to 1}(\ln u) = 0$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\Big[\underbrace{\ln(\underbrace{1-e^x}_{0})}_{-\infty} - \underbrace{\ln(\underbrace{1+e^x}_{2})}_{\ln 2}\Big] = -\infty.$$

Διότι $\lim_{x\to0^-}(1-e^x) = 1-1=0.$

$\lim_{x\to0^-}\left[\ln(1-e^x)\right] \underset{u\to 0}{\overset{u=1-e^x}{=\!=}} \lim_{u\to0^+}(\ln u) = -\infty$

Ομοίως $\lim_{x\to0^-}\left[\ln(1+e^x)\right] = \ln 2$

Άρα $f(A) = (-\infty, 0) = D_{f^{-1}}$

Λύνω την εξίσωση

$f(x) = y$ ως προς $x$

$$\ln(1-e^x) - \ln(1+e^x) = y \iff$$

$$\ln\frac{1-e^x}{1+e^x} = y \iff$$

$$e^{\ln\frac{1-e^x}{1+e^x}} = e^y \iff$$

$$\frac{1-e^x}{1+e^x} = \frac{e^y}{1} \iff$$

$$1-e^x = e^y(1+e^x) \iff$$

$$\iff 1-e^x = e^y + e^y \cdot e^x \iff$$

$$\iff -e^x - e^y \cdot e^x = e^y - 1 \iff$$

$$\iff -e^x(1+e^y) = e^y - 1 \iff$$

$$\iff e^x = -\frac{e^y-1}{1+e^y} \iff$$

$$\iff x = \ln\frac{1-e^y}{1+e^y}$$

$$\boxed{\text{Άρα } f^{-1}(x) = \ln\frac{1-e^x}{1+e^x},\ x \in (-\infty, 0)}$$

E5) Λύνω την εξίσωση

$f(m)=m \iff m\in(-\infty,0)$

$$\ln\frac{1-e^m}{1+e^m}=m \iff$$

$$e^{\ln\frac{1-e^m}{1+e^m}}=e^m \iff$$

$$\frac{1-e^m}{1+e^m}=e^m \iff$$

$$1-e^m=e^m+e^{2m} \iff$$

$$e^{2m}+2e^m-1=0$$ Θέτω $e^m=x$

$$x^2+2x-1=0$$

$$\Delta=4-4\cdot(-1)=8$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

Άρα $e^m=-1+\sqrt{2}$, $e^m=-1-\sqrt{2}<0$ αδύνατη

$$\ln e^m=\ln(-1+\sqrt{2})$$

$$m=\ln(-1+\sqrt{2})$$

Ελέγχω αν $\ln(-1+\sqrt{2})<0 \iff$

$\ln(-1+\sqrt{2})<\ln 1 \iff -1+\sqrt{2}<1 \iff$

$\sqrt{2}<2 \iff \sqrt{2}^2<2^2 \iff 2<4$

που ισχύει

Άρα η λύση $\ln(-1+\sqrt{2})$ δεκτή.

(Ε6) $g(x) = f(x) - x, \quad x<0$

Έστω $x_1, x_2 \in D_g = (-\infty, 0)$

με $x_1 < x_2 \overset{f \downarrow}{\Longleftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$

$\quad -x_1 > -x_2$

$f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2 \Leftrightarrow$

$g(x_1) > g(x_2) \Leftarrow$

$g \downarrow$ στο $(-\infty, 0)$

(Ε7) $f(x) - f(-1) < x+1$

πρέπει $x \in D_f = (-\infty, 0)$

$\ln\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) - \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) < x+1 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\frac{1-e^x}{1+e^x} : \frac{e-1}{e+1}\right) < x+1 \Leftrightarrow$

$\ln \frac{(1-e^x)\cdot(e+1)}{(1+e^x)\cdot(e-1)} < e^{(x+1)} \Leftrightarrow$

$\frac{(1-e^x)\cdot(e+1)}{\underbrace{(1+e^x)}\cdot\underbrace{(e-1)}} < e^x \cdot e$

Μετά από πράξεις, καταλήγω:

$$e+1-e^x < e^x \cdot e^2 + e^{2x} \cdot e^2 - e^{2x} \cdot e$$

Θέτω $e^x = y$

$$e+1-y < e^2 y + e^2 y^2 - e \cdot y^2 \Leftrightarrow$$

$$\underline{e \cdot y^2 - e^2 y^2} - \underline{e^2 y - y} + e + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$(e-e^2)y^2 - (e^2+1)\cdot y + (e+1) < 0$$

$$\Delta = (e^2+1)^2 - 4\cdot(e-e^2)\cdot(e+1) =$$

$$e^4+2e^2+1-4\cdot(\cancel{e^2}+e-e^3-\cancel{e^2}) =$$
$$-4e+4e^3$$

$$e^4+4e^3+2e^2-4e+1 = (\quad)^2$$

$$x^4+4x^3+2x^2-4x+1 =$$

$$\dots\dots^2$$

π.χ. $(x-1)^2 \cdot (x-2)^2$

$$(e-1)^2 \cdot (e-2)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$