

Τάξη: Γ
Τμήμα Γ21

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Εξεταζόμενη ύλη: Μέχρι §3.1 (παράγουσα συνάρτηση)

χρόνος : 3 διδακτικές ώρες

Επώνυμο:

Όνομα:

A1	A2	A3	A4	A
B1	B2	B3	B4	B
Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Γ
Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ
Σ	Υ	Ν	Ο	Λ

ΘΕΜΑ Α

A1 Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 εσωτερικό σημείο διαστήματος του πεδίου ορισμού της και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε αυτό τότε $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 10)

A2 Να διατυπώσετε το Θεώρημα μέσης τιμής. (Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

A) Αν $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ και $f(1)=0$, τότε $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$.

B) Αν η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 , εσωτερικό σημείο διαστήματος και η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε $f''(x_0) = 0$.

Γ) Αν οι συναρτήσεις f και $f+g$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η g θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Δ) Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)^3$, τότε η f έχει δύο θέσεις ακροτάτων.

Ε) Αν μια συνάρτηση f είναι ασυνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. (Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

B1 Να ορίσετε τη σύνθεση της f με την g . (Μονάδες 6)

Αν $w(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{-2x-7}{x+2}}$, $x \in \left[-\frac{7}{2}, -2\right)$, να απαντήσετε τα επόμενα ερωτήματα:

B2 Να δείξετε ότι η w αντιστρέφεται και να ορίσετε την w^{-1} . (Μονάδες 9)

B3 Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $w^2(x)$ με την ευθεία $\psi = -x$. (Μονάδες 4)

B4 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \left[w(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{w(x)}\right) \right]$ (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$.

Γ1 Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και να ορίσετε την παράγωγο της f . (Μονάδες 7)

Γ2 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 5)

Γ3 Δίνονται τα σημεία $A(-1, f(-1))$, $B(0,2)$ και το κινητό σημείο $M(x,\psi)$, το οποίο αρχικά βρίσκεται στη θέση $A(-1, f(-1))$ και αρχίζει να κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f με την τετμημένη του x να κινείται στο διάστημα $[-1,1]$, με ρυθμό μεταβολής $x'(t)=0,1$ μον/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης (MB) τη χρονική στιγμή που η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M , είναι τετραπλάσια της τεταγμένης ψ του M , όπου $\psi > 0$. (Μονάδες 7)

Γ4 Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln x + x - 3$, $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$ και

$F(x)$ η παράγουσα της $f(x)$ με $F(1) = -3$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα, έστω r .

(Μονάδες 4)

Δ2. Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 6)

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) + \frac{(r-1)^2}{r} \geq 0$, $\forall x > 0$, όπου r ο αριθμός που ορίζεται στο ερώτημα Δ1.

(Μονάδες 6)

Δ4. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$, $F_1(x) = x - \ln x$, $x > 0$ και $G(x) = F_1(x) \cdot (\ln x - 2)$,

$x > 0$. Να δείξετε ότι η F_1 είναι μια παράγουσα της f_1 (1 μονάδα). Να υπολογίσετε την $G'(x)$ (1 μονάδα) και με τη βοήθεια της G' να βρείτε την F .

(Μονάδες 9)

Να έχετε επιτυχία!!

Θέμα Α Α3 Α-Σ-Σ-Α-Σ.

Θέμα Β [B1] Η f ορίζεται στο $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ και η g στο $D_g = [3, +\infty)$

Η $g \circ f$ στο $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$$x \neq -2 \text{ και } \frac{x-1}{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-3(x+2)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1-3x-6}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow (-2x-7)(x+2) \geq 0 \text{ και } x \neq -2$$

$$\begin{matrix} -\infty & -7/2 & -2 & +\infty \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} -2x-7 & + & \phi & - & - \\ \hline x+2 & - & - & \phi & + \\ \hline \text{Γινόμεν} & - & \phi & + & \phi & - \end{array} \quad \text{Άρα } D_{g \circ f} = \left[-\frac{7}{2}, -2\right)$$

$$\text{και } (g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2} - 3} = \sqrt{\frac{-2x-7}{x+2}}$$

[B2] Έστω $x_1, x_2 \in \left[-\frac{7}{2}, -2\right)$ με $w(x_1) = w(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{-2x_1-7}{x_1+2}} = \sqrt{\frac{-2x_2-7}{x_2+2}} \Leftrightarrow$

$$(-2x_1-7)(x_2+2) = (x_1+2)(-2x_2-7) \Leftrightarrow \dots x_1 = x_2 \text{ άρα } w: 1-1$$

Για να ορίσω την w^{-1} , λύνω την εξίσωση $w(x) = y$ ως προς x .

$$\text{και έχω } \sqrt{\frac{-2x-7}{x+2}} = y, y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+2} = y^2, y \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x-7 = y^2x + 2y^2, y \geq 0 \Leftrightarrow -2y^2-7 = (y^2+2) \cdot x, y \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-2y^2-7}{y^2+2}, y \geq 0 \text{ τώρα πρέπει } -\frac{7}{2} \leq x < -2 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq \frac{-2y^2-7}{y^2+2} < -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2y^2-7}{y^2+2} < -2 \text{ και } \frac{-2y^2-7}{y^2+2} \geq -\frac{7}{2} \text{ και } y \geq 0$$

και οι 3 καίρι αναληθείς για $y \geq 0$. Άρα το σύνολο τιμών

της w είναι το $[0, +\infty)$ που είναι και πεδίο ορισμού της w^{-1} .

Εναλλακτικά, μπορούσα να βρω το σύνολο τιμών της w με τη

βοήθεια της μονotonίας της w και της συνέχειας.

Έτσι λοιπόν $w^{-1}(x) = \frac{-2x^2-7}{x^2+2}, x \geq 0$

[B3] Λύνω την εξίσωση $w^2(x) = x$. Το πεδίο ορισμού της εξίσωσης

$$\text{είναι το } D_w = \left[-\frac{7}{2}, -2\right) \text{ και έχω } w^2(x) = x \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+2} = -x \Leftrightarrow$$

$$-2x-7 = -x^2+2x \Leftrightarrow x^2=7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7} \text{ δευτή μόνο } x = -\sqrt{7}$$

Το μοναδικό σημείο τομής είναι το $A(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.

[B4] Για $x < -2$ [πεδίο ορισμού της w] έχω $x+2 < 0$ και $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty, \lim_{x \rightarrow -2^-} (-2x-7) = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \left[(-2x-7) \cdot \frac{1}{x+2}\right] = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} w(x) = +\infty. \text{ Στο μοναδικό όριο, θέτω } w(x) = y \text{ και όσον} \quad (1)$$

$x \rightarrow -2$, τότε $y \rightarrow +\infty$, άρα το όριό μου μετασχηματίζεται:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(y \cdot \eta/\frac{1}{y} \right) \stackrel{\frac{1}{y}=u}{u \rightarrow 0^+} \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{u} \cdot \eta/\eta \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta/\eta}{u} = 1$$

Θέμα Γ Γ_1

Έχω

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x < -1 \\ 2x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Η f είναι δοχης σε κανένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ ως πράξεις δοχων. Εξετάζω, με τη βοήθεια του οριζοτύ, τη συνέχεια στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Έχω $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x} = -2$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x^2 = 2$, $f(-1) = 2$. Άρα η f είναι αδοχής στο $x_1 = -1$.

Έχω: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2$, $f(1) = 2$. Άρα f δοχης στο $x_2 = 1$.

Η f είναι πορ/μη στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

Στο $x_1 = -1$ δεν είναι πορ/μη, αφού είναι αδοχής. Στο $x_2 = 1$ εξετάζω την παραγωγιμότητα, με τη βοήθεια του οριζοτύ:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{2}{x^2}}{1} = -2$$

Άρα η f δεν είναι πορ/μη, ούτε στο $x_2 = 1$. Τελικά

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^2}, & x < -1 \\ 4x, & x \in (-1, 1) \\ -\frac{2}{x^2}, & x > 1 \end{cases} \quad \text{και πεδίο οριζοτύ της } f' \text{ το } D_{f'} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

Γ_2 Ξέρω την $y = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$ που είναι παρβολή

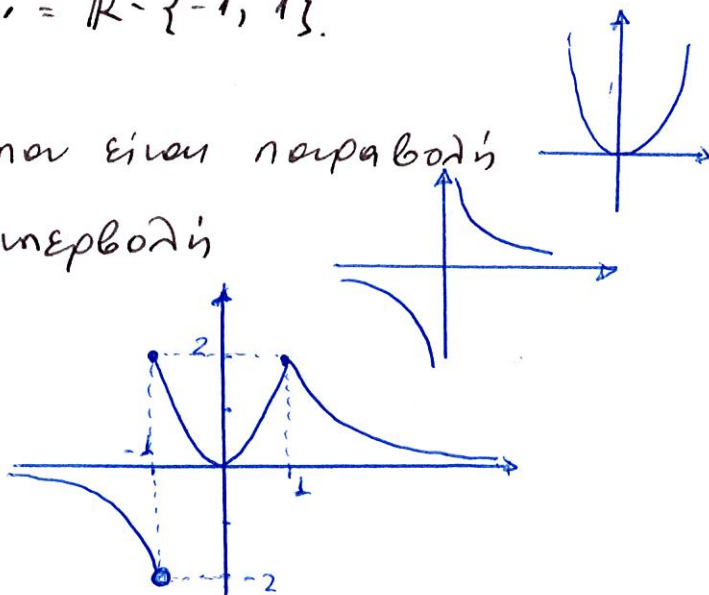
και την $y = \frac{2}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ που είναι υπερβολή

λαμβάνοντας υπόψη τη μέλξη

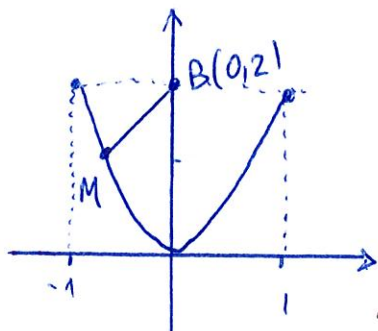
της συνέχειας της f στα

σημεία $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ από

το Γ_1 , έχω το διηλατό δοχής



Γ3



Θεωρώ τη γραφική παράσταση της f για $x \in [-1, 1]$ και το $M(x, y)$ σε μια τυχαία θέση. Η τεταγμένη των M είναι $y = 2x^2$ και η απόστασή των από το $B(0, 2)$ είναι

$$(MB) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2x^2-2)^2} = \sqrt{4x^4 - 7x^2 + 4} = d(x)$$

Άρα $d(x(t)) = \sqrt{4x^4(t) - 7x^2(t) + 4}$. ο ρυθμός μεταβολής της τυχαία χρονική στιγμή t είναι:

$$\left(d(x(t)) \right)' = \frac{16x^3(t) - 14x(t)}{2\sqrt{4x^4(t) - 7x^2(t) + 4}} \cdot x'(t) = \frac{8x^3(t) - 7x(t)}{\sqrt{4x^4(t) - 7x^2(t) + 4}} \cdot x'(t)$$

Η ταχύτητα της εμφανιζόμενης είναι $f'(x) = 4x$. Την χρονική στιγμή t_0 είναι $f'(x) = 1 \Leftrightarrow 4x = 4 \cdot 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1/2$ και επειδή (από την εκφώνηση) πρέπει $\psi > 0$, η τιμή $x = 0$ που αντιστοιχεί σε $\psi = 0$, απορρίπτεται. Άρα $x(t_0) = 1/2$, $x'(t_0) = 0,1$

και αντικαθιστώντας: $\frac{8 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 7 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{4 \cdot (\frac{1}{2})^4 - 7 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 4}} \cdot 0,1 \text{ k/sec.}$

Γ4

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} 2y^2 = 0$. Ένω $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Άρα το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και εφαρμόζω κανόνα DLH

έχω: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)'}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^2}} =$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f'\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0^+} f'(y) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} 4y = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$

Θέμα Δ Δ1 Η g είναι όπως στο $[1, e]$ των πράξεων έχων.

$g(e) = \ln e + e - 3 = 1 + e - 3 = e - 2 > 0$
 $g(1) = \ln 1 + 1 - 3 = -2 < 0$ Από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists r \in (1, e) : g(r) = 0$

Είναι $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow g \uparrow$ στο $(0, +\infty) \Rightarrow$ το r μοναδικό

Δ2 Είναι $F''(x) = f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' (\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot (\ln x - 2)' =$
 $= \frac{1}{x^2} (\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} (\ln x - 2) + \frac{x-1}{x^2} = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

Αφού $g \uparrow$ είναι

$g(x)$	-	0	+
$F''(x)$	-	+	
$F(x)$	$\cap$	$\cup$	

Η F παρουσιάζει καμψη στο r

(3)

Δ3 Επειδή $F''(x) = f'(x)$, από το Δ2 έχουμε τον πίνακα προ-
βήμων της $f'(x)$.

	0	r	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Η f έχει θέση $x_1 = r$ παραγωγής ολικό
ελάχιστο. άρα $f(x) \geq f(r) \quad \forall x > 0$.

όμως $f(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)(\ln r - 2)$ και το r είναι η ρίζα

$$\text{της } g(x) = 0 \Rightarrow \ln r + r - 3 = 0 \Rightarrow \ln r = 3 - r$$

$$\text{Από (1) έχω } f(r) = \frac{r-1}{r} \cdot (3-r-2) = \frac{r-1}{r} (1-r) = -\frac{(r-1)^2}{r}$$

$$\text{'Αρα } f(x) \geq f(r) \Rightarrow f(x) \geq -\frac{(r-1)^2}{r} \Leftrightarrow f(x) + \frac{(r-1)^2}{r} \geq 0 \quad \forall x > 0$$

Δ4 Είναι $F_1'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = f_1(x)$ άρα η F_1 είναι
μια παράγουσα της f_1 στο διάστημα $(0, +\infty)$

$$\text{Είναι } G'(x) = F_1'(x) \cdot (\ln x - 2) + F_1(x) \cdot (\ln x - 2)' = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot (\ln x - 2) + F_1(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{'Αρα } G'(x) = f(x) + \frac{F_1(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$G'(x) = f(x) + \frac{x - \ln x}{x} = f(x) + 1 - \frac{\ln x}{x} = f(x) + 1 - \ln x \cdot (\ln x)' = f(x) + 1 - \frac{1}{2}(\ln^2 x)'$$

$$\text{'Αρα } G'(x) = f(x) + (x - \frac{1}{2} \ln^2 x)' \Leftrightarrow (G(x) - x + \frac{1}{2} \ln^2 x)' = f(x), \quad x \in (0, +\infty)$$

'Αρα μια παράγουσα της $f(x)$ στο $(0, +\infty)$ είναι η

$G(x) - x + \frac{1}{2} \ln^2 x$. από το θεώρημα των παραγουσών έχω:

$$F(x) = G(x) - x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C = (x - \ln x) \cdot (\ln x - 2) - x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

$$\text{Αντικαθιστώντας } x=1 : F(1) = (1-0)(0-2) - 1 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 + C = -3 + C$$

$$\text{Από την υπόθεση, όπως έχω } F(1) = -3 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{'Αρα } F(x) = (x - \ln x) \cdot (\ln x - 2) - x + \frac{1}{2} \ln^2 x.$$