

Τάξη: Γ

Τμήμα Γ22

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Εξεταζόμενη ύλη : Μέχρι ρυθμό μεταβολής

χρόνος : 3 ώρες

Επώνυμο:

Όνομα:

A1	A2	A3	A4	A
B1	B2	B3	B4	B
Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Γ
Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ
Σ Y N O Λ O				

ΘΕΜΑ Α

A1 Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε θα είναι και συνεχής στο x_0 .
(Μονάδες 7)

A2 Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano. (Μονάδες 4)

A3. Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x_0 . (Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$

β. Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x}$, δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

δ. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $2^{\text{ου}}$ βαθμού έχει πάντα μια ακριβώς οριζόντια εφαπτομένη.

ε. Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι 1-1. Τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 2X5=10)

ΘΕΜΑ Β Δίνονται οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε: $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ και

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x).$$

B1. Να αποδείξετε ότι $f=g$ (μονάδες 3) και ότι η f είναι περιττή (μονάδες 3). (Μονάδες 6)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (Μονάδες 4).

(Μονάδες 7)

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

(Μονάδες 3)

B4. Αν $h(x)=e^x$, να ορίσετε τη συνάρτηση $H(x) = (hog)(x)$ (μονάδες 3) και να λύσετε την εξίσωση

$$H(x) = -\frac{2}{3}x \quad (\text{Μονάδες 6})$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f^2(x) = 4xf(x) + 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) > 4$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$, $x \in \mathbb{R}$, διατηρεί πρόσημο, (μονάδες 3) και ότι

$$f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{μονάδες 4})$$

(Μονάδες 7)

Γ2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(Μονάδες 1+3)

Γ3. Να εξετάσετε πόσες εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f υπάρχουν, οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $\psi=3\chi$ και να γράψετε τις εξισώσεις τους. **(Μονάδες 5)**

Γ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) + 3x^2 + x \cdot f(x) + x^2 \cdot 3^x \cdot \ln\left(\frac{1}{5}\right)^x}{f^2(x) + x^2 + x \cdot \ln x}$ **(Μονάδες 9)**

ΘΕΜΑ Δ. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta \cdot x & x < 1 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $a=\beta=1$ **(Μονάδες 5)**

Δ2 Να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(Μονάδες 6)**

Δ3. Ένα σημείο $M(\chi, \psi)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\psi=f(x)$, $\chi \geq 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες

ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\triangle MOK$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$ **(Μονάδες 6)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα χ_0 , η οποία είναι αρνητική (μονάδες 3) και στη

συνέχεια, ότι η εξίσωση $f^2(x) - \chi_0 \cdot f(x) + \frac{e^{2(\chi_0-1)}}{4} = 0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$ **(Μονάδες 5)**

(Μονάδες 8)

Καλά κι ευλογημένα Χριστούγεννα!
Καλή επιστροφή στο σχολείο ... με το νέο έτος!