

Τάξη: Γ

Τμήμα Γ21

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Εξεταζόμενη ύλη: Μέχρι θεωρήματα συνέχειας

χρόνος : 3 διδακτικές ώρες

Επώνυμο:

Όνομα:

A1	A2	A3	A4	A
B1	B2	B3	B4	B
Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Γ
Δ1	Δ2	Δ3	Δ4	Δ
Σ Y N O Λ O				

ΘΕΜΑ Α

A1 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ και πραγματικός αριθμός η με $f(a) < \eta < f(b)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, b)$ με $f(x_0) = \eta$. (Μονάδες 10)

A2 Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής. (Μονάδες 5)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

A) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

B) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα Δ , τότε υπάρχουν m, M τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in \Delta$.

Γ) Αν η συνάρτηση f δεν είναι 1-1, τότε δεν είναι γνησίως μονότονη.

Δ) Αν η συνάρτηση f^2 είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

E) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) \cdot f(b) > 0$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (a, b)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ (Μονάδες 2x5=10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$.

B1 Να ορίσετε τη συνάρτηση $h=f+g$. (Μονάδες 6)

B2 Δίνεται η συνάρτηση w με $w(x) = \frac{2x+4}{x-4}$, με $x \neq 4$. Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $w(x)=h(x)$. (Μονάδες 6)

B3 Να δείξετε ότι η συνάρτηση h είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $|h(x)| = \frac{3}{2}$. (Μονάδες 7)

B4 Να ορίσετε τη συνάρτηση $\phi(x) = \frac{1}{h(x)-2}$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^4 + x^2 - 1$, και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$.

Γ1 Να εξετάσετε αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την f στο $[-2, 2]$. Να βρείτε, αν υπάρχουν $\xi \in (-2, 2)$, ώστε $f(\xi)=0$. (Μονάδες 2+4)

Γ2 Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ και να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της h τέμνει την ευθεία $\psi = x$. (Μονάδες 3+3)

Γ3 Να εξετάσετε αν η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και h^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. **(Μονάδες 2+3)**

Γ4 Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια: $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) + 1}$, $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}{f(x) + 1}$ και

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\eta\mu\chi)}{x} \quad \textbf{(Μονάδες 2+3+3)}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^2(x) = e^x \cdot f(x) + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = -1$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x - \sqrt{e^{2x} + 8}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. **(Μονάδες 7)**

Δ2. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{-4}{e^x + \sqrt{e^{2x} + 8}}$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 5)**

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 2}{x}\right)$,

$x \in (-\sqrt{2}, 0)$. **(Μονάδες 8)**

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = \ln|x|$. **(Μονάδες 5)**

Να έχετε επιτυχία!!

Θέμα Α Α3 Σ-Σ-Σ-Α-Α.

Θέμα Β [B1] Για μν f οριστή $x \geq 0$ και $\sqrt{x}-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$

Αρα $D_f = [0, 4) \cup (4, +\infty)$. Για μν $g: x \geq 0$ και $\sqrt{x}+2 \neq 0$.

Αρα $D_g = [0, +\infty)$.

Το νέο ορισμένο με h είναι $D_h = D_f \cap D_g = [0, 4) \cup (4, +\infty)$

$$h(x) = f(x) + g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}{x-4} + \frac{x-2\sqrt{x}-\sqrt{x}+2}{x-4} = \frac{2x+4}{x-4}$$

[B2] Επειδή $D_h = [0, 4) \cup (4, +\infty)$, $D_w = \mathbb{R} - \{4\}$ επ' αφο.
είναι $D_h \cap D_w = [0, 4) \cup (4, +\infty)$. Αυτό είναι και το σύνολο

στο οποίο ισχύει $w(x) = h(x)$

[B3] Για $x_1, x_2 \in D_h$ είναι $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow w(x_1) = w(x_2) \Leftrightarrow$

$$\frac{2x_1+4}{x_1-4} = \frac{2x_2+4}{x_2-4} \Leftrightarrow (x_2-4)(2x_1+4) = (x_1-4)(2x_2+4) \dots \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

'Αρα $h: 1-1$. Το νέο ορισμένο με εξίσωσης

$|h(x)| = 3/2$ είναι στο $[0, 4) \cup (4, +\infty)$ και έχω

$$|h(x)| = 3/2 \Leftrightarrow \left| \frac{2x+4}{x-4} \right| = 3/2 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x-4} = 3/2 \vee \frac{2x+4}{x-4} = -3/2$$

$$\Leftrightarrow 4x+8 = 3x-12 \Leftrightarrow x = -20 \text{ άπορ.} \mid \text{και από μν 2η έχω}$$

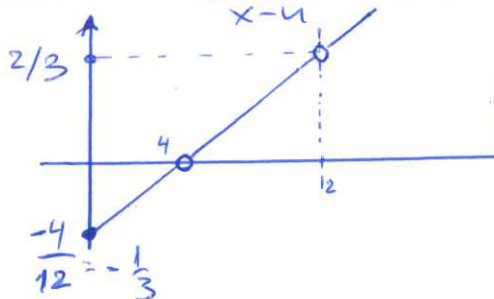
$$4x+8 = -3x+12 \Leftrightarrow 7x = 4 \Leftrightarrow \boxed{x = 4/7} \text{ δεκτή.}$$

[B4] Η $\varphi(x)$ ορίζεται για $x \in D_h$ και $h(x) \neq 2 \Leftrightarrow \frac{2x+4}{x-4} \neq 2 \Leftrightarrow$

$$2x+4 \neq 2x-8 \Leftrightarrow -x \neq -12 \Leftrightarrow x \neq 12.$$

Αρα $D_\varphi = [0, 4) \cup (4, 12) \cup (12, +\infty)$.

$$h(x) - 2 = \frac{2x+4}{x-4} - 2 = \frac{2x+4-2x+8}{x-4} = \frac{12}{x-4} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x-4}{12}$$



$$\lim_{x \rightarrow 12} \varphi(x) = \frac{12-4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\varphi(0) = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Θέμα Γ Γ₁ Η f ορίζεται στο $[-2, 2]$ όπως $f(2) = 2^4 + 2^2 - 1 = 19 > 0$

$f(-2) = 19 > 0$. Άρα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του Θ-Βολτσαμ.

Για να βρω τα ξ , λύω την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$x^4 + x^2 - 1 = 0. \text{ Θέω } x^2 = y \rightarrow y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Για $y = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, και η εξίσωση $x^2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ αδύνατη.

όπως, επειδή $\sqrt{5} > 1$, η εξίσωση $x^2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

πρέπει να ελέγξω αν $-2 < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < 2 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < 2 \Leftrightarrow$

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 4 \Leftrightarrow -1+\sqrt{5} < 8 \Leftrightarrow \sqrt{5} < 9 \text{ που ισχύει.}$$

ομοίως ελέγχω: $-2 < -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < 2$. Άρα υπάρχουν

2 $\xi \in (-2, 2)$ ως ανωτέρω.

Γ₂ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = [0, 4]$

$$-2 \leq g(x) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

$$h(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 + (\sqrt{x})^2 - 1 = x^2 + x - 1$$

Για να βρω τα σημεία που η C_h τέμνει την $y=x$,

λύω την εξίσωση $h(x) = x$, ή $x \in [0, 4] \Leftrightarrow$

$$x^2 + x - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1. \text{ Δεχόμαστε}$$

Άρα το μοναδικό σημείο $A(1, 1)$,

ήδη η $x=1$

Γ₃ $h(x) = x^2 + x - 1$, $D_h = [0, 4]$.

Η συνάρτηση $A(x) = x^2 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μέγιστο ελάχιστο

$$\text{στο } x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A(x) \uparrow \text{ στο } [-\frac{1}{2}, +\infty).$$

Άρα και η $h(x) \uparrow$ στο $[0, 4] \Rightarrow$ αντιστρέφεται.

$$h(0) = -1, h(4) = 4^2 + 4 - 1 = 19.$$

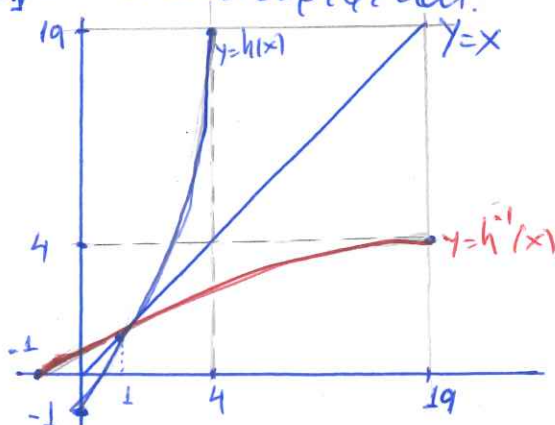
Βασικά σημεία της C_h

$(0, -1)$, $(4, 19)$ και $(1, 1)$

Βασικά σημεία της $C_{h^{-1}}$

$(-1, 0)$, $(19, 4)$ και $(1, 1)$

$C_h, C_{h^{-1}}$ αντιστρέφονται ως προς την $y=x$.



$$\boxed{\Gamma_4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) = +\infty$$

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2+1} = 1 > 0$.

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sqrt{x}-1}{f(x)+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sqrt{x}-1}{x^4+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6\sqrt{x}-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) = -\frac{1}{2}$$

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sqrt{x}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sqrt{x}-1}{x^2 \cdot (6\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^2} \cdot \frac{1}{6\sqrt{x}+1} \right) = -\frac{1}{2}$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(mx)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^4+mx^2-1}{x} = 0.$$

Ακόμη $|A(x)| = \frac{|mx^4+mx^2-1|}{x} \leq \frac{|mx^4|+|mx^2|+1}{x} \leq \frac{3}{x}$

Αρα $|A(x)| \leq \frac{3}{x} \Leftrightarrow -\frac{3}{x} \leq A(x) \leq \frac{3}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$

Από κριτήριο παρεμβολής $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0$

Θέλια Α $\boxed{\Delta_1}$ Είναι $f^2(x) - f(x)e^x = 2 \Leftrightarrow$

$$f^2(x) - 2f(x) \cdot \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{4}e^{2x} + 2 \Leftrightarrow \underbrace{\left(f(x) - \frac{1}{2}e^x \right)^2}_{A(x)} = \frac{e^{2x}+8}{4} \quad (1)$$

Αντι να εξισώσω $A(x)=0 \Leftrightarrow A^2(x)=0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{e^{2x}+8}{4} = 0$ αδύνατο
Αρα $A(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Επινολέων $A(x)$ έχει στο $\mathbb{R}$

και η πρόβλεψη και αιώσεις έχουν. Από θεώρημα Bolzano $\Rightarrow$
η $A(x)$ διασπεί πρόβλημα στο $\mathbb{R}$. αρα $A(0) = f(0) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0$
 $\Rightarrow A(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$(1) \Rightarrow A^2(x) = \frac{e^{2x}+8}{4} \Leftrightarrow |A(x)| = \frac{\sqrt{e^{2x}+8}}{2} \Leftrightarrow A(x) = -\frac{\sqrt{e^{2x}+8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \frac{1}{2}e^x = -\frac{\sqrt{e^{2x}+8}}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - \sqrt{e^{2x}+8}}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\Delta_2} \forall x \in \mathbb{R} \text{ έχω: } f(x) = \frac{(e^x - \sqrt{e^{2x}+8})(e^x + \sqrt{e^{2x}+8})}{2 \cdot (e^x + \sqrt{e^{2x}+8})} = \frac{e^{2x} - e^{2x} - 8}{2(e^x + \sqrt{e^{2x}+8})}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-4}{e^x + \sqrt{e^{2x}+8}}, x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow e^{2x_1} < e^{2x_2} \Leftrightarrow e^{2x_1} + 8 < e^{2x_2} + 8$
 $\Leftrightarrow \sqrt{e^{2x_1} + 8} < \sqrt{e^{2x_2} + 8} \left\{ \begin{array}{l} (+) 0 < e^{x_1} + \sqrt{e^{2x_1} + 8} < e^{x_2} + \sqrt{e^{2x_2} + 8} \Leftrightarrow \\ x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \end{array} \right.$

$$\frac{1}{e^{x_1} + \sqrt{e^{2x_1} + 8}} > \frac{1}{e^{x_2} + \sqrt{e^{2x_2} + 8}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{-4}{e^{x_1} + \sqrt{e^{2x_1} + 8}} < \frac{-4}{e^{x_2} + \sqrt{e^{2x_2} + 8}} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow / \mathbb{R}$$

Δ3 Αφού $f \uparrow$ και ορίζομεν στο $\mathbb{R} \Rightarrow f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \sqrt{e^{2x} + 8}}{2} = \frac{0 - \sqrt{8}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{e^x + \sqrt{e^{2x} + 8}} = 0$, διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$

Άρα $f(A) = (-\sqrt{2}, 0)$. Για να νιώσουμε με $f'(x)$, ας μαντέψουμε τις εξισώσεις $f(x) = y$ ως προς x .

Αντί μν αρχική σχέση $f^2(x) = e^x \cdot f(x) + 2$ έχω

$$y^2 = e^x \cdot y + 2 \Leftrightarrow y^2 - 2 = e^x \cdot y \Leftrightarrow e^x = \frac{y^2 - 2}{y} \quad \begin{array}{l} \text{αφού} \\ y \in f(A) \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \ln \frac{y^2 - 2}{y} \cdot \text{διότι } -\sqrt{2} < y < 0 \Leftrightarrow y^2 < 2 \Leftrightarrow y^2 - 2 < 0 \text{ και } y < 0.$$

Άρα $\frac{y^2 - 2}{y} > 0$. Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$, $x \in (-\sqrt{2}, 0)$.

Δ4 Η εξίσωση ορίζεται για $x \in D_{f^{-1}}$ και $x \neq 0$ (λόγω $\ln|x|$)

αφού $f^{-1}(x) = \ln|x| \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{x} = \ln|x|$ και αφού $x \in (-\sqrt{2}, 0)$

ισχύει $\frac{x^2 - 2}{x} = -x \Leftrightarrow x^2 - 2 = -x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = \pm 1$, δυνάμει μόνο η $x = -1 \in (-\sqrt{2}, 0)$.