

Τάξη: Γ
Τμήμα Γ21

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Εξεταζόμενη ύλη : Όλη η ύλη

χρόνος : 2 ώρες

Επώνυμο:

Όνομα:

				A	
B1	B2	B3	B4	B	
B5	B6	B7	B8	B	
Σ	Υ	Ν	Ο	Λ	Ο

ΘΕΜΑ Α

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

A1. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 8$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$.

A2. Αν $f(x) < 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) < 3$.

A3. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$.

A4. Αν $f(x)$ συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση $f(x)+g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής στο x_0 .

A5. Η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ με $a \neq 0$, έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

A6. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .

A7. Αν $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι 1-1.

A8. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

A9. Η συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Τότε

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

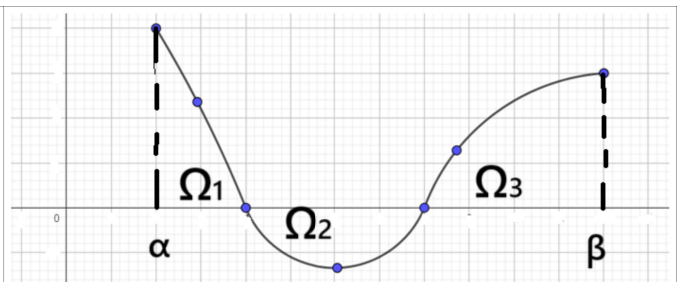
A10. Αν $\int_a^b f(x) dx = 0$, τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$, ώστε $f(\xi) = 0$.

A11. Για τα εμβαδά των χωρίων του διπλανού σχήματος, ισχύει: $E(\Omega_1) = 2$,

$$E(\Omega_2) = 1, \quad E(\Omega_3) = 3. \text{ Τότε}$$

$$\int_a^b f(x) dx = 6.$$

[Μονάδες 3X11=33]



ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + \alpha, & x \leq 0 \\ -x + 3, & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \ln x.$$

B1. Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και να ορίσετε την παράγωγο συνάρτηση της f και την δεύτερη παράγωγο της f .

B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

B3. Να ορίσετε την συνάρτηση $h=f+g$.

B4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $h(x)=0$.

B5. Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=0$ και $f(x^2)=0$.

B6. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(f(x))]$

B7. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $\psi=x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

B8. Σημείο $K(\chi, \psi)$ με $\chi > 0$, κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f . Να βρείτε τη θέση του K ώστε η απόσταση του από το $O(0,0)$ να είναι ελάχιστη, όπως και την ελάχιστη αυτή απόσταση.

[Μονάδες 8-8-8-8-9-9-9 σύνολο=67]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ και $g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \ln x$.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 με $g(x_0)=0$.

Γ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό ακρότατο στο x_0 με

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}.$$

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{e+1}$, έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x$, για κάθε $x > 0$.

Γ5. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^4) - f\left(\frac{1}{x^4}\right) = 2x^2 - 2$.

Γ6. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} x[f(\varepsilon \varphi x) - f(\sigma \varphi x)]$.

Γ7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{e^{-\frac{1}{2025}}}^{e^{2025}} \frac{(x+1) - x \ln x}{x(x+1)^2} dx$.

Γ8. Να δείξετε ότι $f(x) \leq \frac{x-1}{2}$, $\forall x > 0$.

[Μονάδες 8-8-8-8-9-9-9 σύνολο=67]

«Έν οίδα ὅτι οὐδὲν οίδα»

Διαγώνισμα 7-5-25 Γ21

Θέμα Α 2-1-1-2-2-1-2-2-1-2-1

Θέμα Β [B1] Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow e^0 + a = 3 \Leftrightarrow a = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} + 2 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} =$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^{-x}}{1} = -1. \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x + 3 - 3}{x} = -1.$$

$$\text{'Αρα } f'(0) = -1, \text{ συνεπώς } f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x < 0 \\ -1, & x = 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^{-x} + 1}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 - (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0.$$

'Αρα η f δεν είναι 2 φορές παραγόμενη στο $x_0 = 0$.

[B2] Το παραπάνω ότι $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \downarrow \Rightarrow$ αυστηρά φθίνουσα
το π.ο. της f' είναι το σύνολο τιμών της f .

$$\text{Έχουμε } A = \underbrace{(-\infty, 0]}_{A_1} \cup \underbrace{(0, +\infty)}_{A_2}. \text{ } f \text{ φθίνει και } \downarrow \text{ στο } A, \Rightarrow f(A_1) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty$$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, -1). \text{ 'Αρα } f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-1, +\infty) \cup (-\infty, -1) = \mathbb{R}.$$

'Αρα το π.ο. της f' είναι το $\mathbb{R}$.

$$[B3] D_g = (0, +\infty), D_f = \mathbb{R}, D_{f+g} = D_f \cap D_g = (0, +\infty)$$

$$\text{Αρα για } x > 0 \text{ έχουμε } h(x) = f(x) + g(x) = -x + 3 + \ln x$$

$$[B4] \text{ Η } h \text{ είναι φθίνουσα και } h\left(\frac{1}{e^3}\right) = -\frac{1}{e^3} + 3 + \ln e^3 = -\frac{1}{e^3} < 0$$

$$h\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{1}{e^2} + 3 + \ln e^2 = -\frac{1}{e^2} + 1 = \frac{-1 + e^2}{e^2} > 0.$$

Αρα η h φθίνει στο $\left[\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e^2}\right]$, από Θ. Bolzano, υπάρχει π/2 της

Εξισώνω $h(x)=0$. $h'(x) = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$.

	0	1	$+\infty$
$1-x$		+	0
$h'(x)$		+	-
$h(x)$		↗	↘

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 3 + \ln x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \underbrace{\left(-1 + \frac{3}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)}_{A(x)} \right] = -\infty$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = -1$

Αν $A_1 = (1, +\infty)$. Αφού $h \downarrow$ και έχουμε στο $A_1 \Rightarrow$

$$h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(1) \right) = (-\infty, 2). \quad 0 \in h(A_1).$$

Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες, μια στο $A_1 = (0, 1)$ και μια στο $A_2 = (1, +\infty)$.

B5 Για $x \leq 0$ έχω $f(x)=0 \Leftrightarrow e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = -2$ αδύνατο.

Για $x > 0$ έχω $f(x)=0 \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 > 0$ δευτή.

Άρα, μοναδική λύση $x=3$.

$f(x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}$. [Προφανώς το π.ο. της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$ άρα] δεκτές οι ρίζες.

B6 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (e^u + 2) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(f(x))] \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} [f(u)] = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-u + 3) = -\infty.$$

B7 Θα λύσω την εξίσωση $f(x)=x$. [π.ο. εξισώσεις το $\mathbb{R}$]

Για $x > 0$. $f(x)=x \Leftrightarrow -x + 3 = x \Leftrightarrow -2x = -3 \Leftrightarrow x = 3/2$ δευτή.

Για $x < 0$ $f(x)=x \Leftrightarrow e^x + 2 = x \Leftrightarrow \underbrace{e^x - x + 2}_{B(x)} = 0$

$$B'(x) = -e^x - 1 < 0 \Rightarrow B(x) \downarrow$$

$$B(x) \text{ γνημ} \Rightarrow B((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} B(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} B(x) \right) = (3, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} B(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (e^u + u + 2) = +\infty. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} B(x) = 1 + 2 = 3$$

Αφού $0 \notin B((-\infty, 0))$ άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $(-\infty, 0)$

τελικά η Cf τέλνει την ευθεία $y=x$ σε μοναδ. συντελ. 0 με τεταμένη $3/2$

B8 Χρειάζεται την Cf μόνο για $x > 0$ που είναι η ελάχιστη ευθεία. $(ob) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (3-x)^2} = \sqrt{x^2 + 9 - 6x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} = d(x)$

$d'(x) = \frac{4x-6}{2\sqrt{2x^2-6x+9}}, x > 0. \quad d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$

	0	3/2	$+\infty$
$d'(x)$	-	0	+
$d(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Στη θέση $x_1 = 3/2$ η απόσταση (ob) γίνεται ελάχιστη $\Rightarrow d(3/2) = \dots$

ελατ.

Θέλας **Γ1** $g(e) = 1 + \frac{1}{e} - \ln e = \frac{1}{e} > 0, \quad g(e^2) = 1 + \frac{1}{e^2} - \ln e^2 = \frac{1}{e^2} - 1 < 0$

g έχει στο $[e, e^2]$, από Θ. Bolzano $\Rightarrow \exists x_0 \in (e, e^2) : g(x_0) = 0$
 Είναι $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0, \forall x > 0 \Rightarrow x_0$ μοναδικό στο $D_f = (0, +\infty)$.

Γ2 $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$. Άρα $g \downarrow$

Γ.α $x < x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) = 0$ και για $x > x_0 \Rightarrow g(x) < 0$

$f(x_0) = \frac{\ln x_0}{x_0 + 1}$. Άρα $x_0 : g(x_0) = 0 \Rightarrow$

	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{1}{x_0} - \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 + \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 + 1}{x_0}$.

Άρα $f(x_0) = \frac{\ln x_0}{x_0 + 1} = \frac{x_0 + 1}{x_0(x_0 + 1)} = \frac{1}{x_0}$ ο.ε.δ.

Γ3 Παρατηρώ ότι $f(e) = \frac{\ln e}{e+1} = \frac{1}{e+1}$ και από Γ1 έχω
 ότι $x_0 \in (e, e^2) \Rightarrow x_0 > e \xrightarrow{f \uparrow} f(x_0) > f(e)$ μοναδ. άρα
 στο $(0, x_0]$

και $x_0 > e \xrightarrow{f \uparrow} f(x_0) > f(e) \Rightarrow f(x_0) > \frac{1}{e+1}$.

Τότε f έχει και $\downarrow$ στο $A_2 = [x_0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$
 $\xRightarrow{\frac{0}{\infty}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Άρα $f(A_2) = (0, f(x_0)]$ και $\frac{1}{e+1} \in f(A_2)$

Άρα $\exists$ άλλη τιμή μοναδ. επί στο A_2 .

τελικά η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{e+1}$ έχει 2 ακριβώς ρίζες.

Γ4 Ανάβ. βγαίνει με αλγεβρικές πράξεις.

Γ5 Για το π.ο. της εξίσωσης πρέπει να ορίσουμε
 η $f(x^4)$ και η $f(\frac{1}{x^4})$, επειδή το π.ο. της f είναι το $\mathbb{R}$,
 πρέπει $x^4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Τώρα η εξίσωση είναι ισο-
 δύναμη με $\ln x^4 = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow 2 \ln x^2 = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow$
 $\ln x^2 = x^2 - 1$, που από τη βασική ανισότητα $\ln u \leq u-1$

είναι ισόδυναμη με $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ δευτερές

Γ6 είναι $\lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot f(6ex)] = 0$. Δόω

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot f(6ex)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 6ex}{6ex+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{6ex+1} \cdot x \cdot (\ln 6ex - \ln 1x) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{6ex+1} \cdot \underbrace{(x \cdot \ln 6ex)}_{A(x)} - \underbrace{x \cdot \ln 1x}_{B(x)} \right] = \frac{1}{e+1} \cdot (0-0) = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1x} \cdot 1x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1x \cdot \left(-\frac{x}{1x} \right) \cdot x \right]$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 0. \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = 0 \cdot \ln 1 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot f(1ex)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{\ln 1ex}{1ex+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1ex+1} \cdot x \cdot (\ln 1x - \ln 6x) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1ex+1} \cdot \underbrace{(x \cdot \ln 1x)}_{\text{είναι το } B(x)} - \underbrace{x \cdot \ln 6x}_{\text{είναι το } A(x)} \right] = \frac{1}{e+1} \cdot (0-0) = 0.$$

Άρα το Ιντερμέδιο όριο είναι $\lim_{x \rightarrow 0} [x \cdot f(1ex) - x \cdot f(6ex)] = 0 - 0 = 0$

Γ7 $\frac{x+1-x \cdot \ln x}{x \cdot (x+1)^2} = \frac{1 + \frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2} = f'(x)$ από Γ2

Άρα $I = \int_{e^{\frac{1}{2025}}}^{e^{2025}} f'(x) dx = \left[f(x) \right]_{e^{\frac{1}{2025}}}^{e^{2025}}$

Γ8 είναι $\frac{\ln x}{x+1} \leq \frac{x-1}{2} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x \leq (x+1) \cdot (x-1) \Leftrightarrow \ln x^2 \leq x^2 - 1$

που είναι η βασική ανισότητα $\ln x \leq x-1$ για $x = x^2$.