

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \ln(x - 5 + e) + 2 \cdot (\alpha + 1) \cdot e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

i) Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.

ii) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \beta x + \alpha}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f

να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε:

$$f^2(x) + g^2(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.

4. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^5(x) + f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

5. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

$$\text{με } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10.$$

i) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = -1$.

iii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 5}{x + 1}$.

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0, \pi]$ και ισχύει

$$1 + 2\sqrt{\eta\mu x} \leq f(x) \leq 2 + \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in [0, \pi]$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{f(x) - 3}$.

iii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|3 - f(x)| - xf(x) - 3}{f(x) - 3}$.

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιές λανθασμένες (Λ).

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $f(x_0) > 0$.
3. Μπορεί μια συνάρτηση f να είναι συνεχής σ' ένα σημείο $x_0 \notin D_f$.
4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η συνάρτηση της $g + f$ δεν είναι συνεχής στο x_0 .
5. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 .
7. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 .