1. Αν f συνάρτηση για την οποία ισχύει $xf(x)-x^4+\eta\mu(\alpha x)=x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, και $f(0)=-\alpha\neq 0$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

ii) Να υπολογίσετε τα $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ ώστε $\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0$.
Να αποδείξετε ότι:
Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες από τις οποίες τουλάχιστον η μία βρίσκεται στο $(0,1)$.

3. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0,1]$ και συνεχής με $f(0)=f(1)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{\nu}\right)$ όπου $\nu\in\mathbb{N}^*$.

i) Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g;

ii) Όταν $\nu>1$ να αποδείξετε ότι $g(0)+g\left(\frac{1}{\nu}\right)+g\left(\frac{2}{\nu}\right)+\ldots+g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)=0$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f\left(x+\frac{1}{\nu}\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1)$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta$, $\alpha,\beta$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $\beta>0$, $\alpha+\beta<-1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$.

5. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $f(x)+g(x)=\beta x$, $\beta\in\mathbb{R}$ και $f(x)=(\alpha^2+1)x^2-2x-3$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$ όπου $\rho_1,\rho_2$ οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

6. Αν για τις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ συναρτήσεις f, g ισχύουν οι σχέσεις $f(\alpha)=g(\beta)=\alpha$ και $f(\beta)=g(\alpha)=\beta$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $3f(\xi)+4g(\xi)=7\xi$.

7. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Αν $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=9$ και $f(1)=1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\sqrt{f(x)}=3$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(0,1)$.

8. Έστω f, g συνεχείς στο $A=[0,1]$ με $f(A)=g(A)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

**i)** Να δείξετε ότι $0\le f(x)+g(x)\le 1$, για κάθε $x\in A$.

**ii)** Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$, τέτοιο ώστε $f(x_0)+g(x_0)=x_0$.

9. Έστω συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x^2+f^2(x)=5x$.

Για κάθε $x\in(0,5)$ να δείξετε ότι:

**i)** η f δεν έχει ρίζες στο $(0,5)$ **ii)** η f έχει σταθερό πρόσημο στο $(0,5)$.

**iii)** Να βρείτε τον τύπο της f στο $(0,5)$, αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $f(1)=-2$.

10. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει:

$$[f(\alpha)]^2+[f(\beta)]^2+2\le 2[f(\alpha)-f(\beta)].$$

Να αποδείξετε ότι η $C_f$ τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(\alpha,\beta)$.

11. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x)\cdot\left[f(x)+2e^x\right]=x^2$ με $f(0)=0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

12. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$f^3(x)+2f^2(x)+3f(x)=x^2-4x+3+e^{-x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της τέμνει τον $x'x$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi\in(1,2)$.

13. **Δίνεται η εξίσωση $\frac{\kappa^2}{x}+\frac{\lambda^2}{x+1}+\frac{\mu^2}{x-1}=0$, όπου $\kappa\lambda\mu\neq 0$.**

**i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1,1)$.**

**ii) Αν $x_1,x_2$ οι ρίζες αυτές, να δείξετε ότι $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{\mu^2-\lambda^2}{\kappa^2}$.**

14. Δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $f([\alpha,\beta])=g([\alpha,\beta])=[\alpha,\beta]$ και $\alpha\neq 0$. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\beta\cdot f(\xi)+\alpha\cdot g(\xi)=\xi\cdot(\alpha+\beta)$.