3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$f(0)=0 \quad \text{και} \quad f(x)>\sqrt{x} \text{ για κάθε } x>0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

11. Αν για κάποια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$|f(x)|\le x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=0$ **ii)** η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και τέτοια, ώστε $f(0)\le 0$ και $f(x)+f(2x)+f(3x)+f(4x)\ge 10x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι: **i)** $f(0)=0$ **ii)** $f'(0)=1$.

13. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και τέτοια, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=\sqrt{3}.$$

Να αποδείξετε ότι: **i)** $f'(0)=\sqrt{3}$

ii) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=\frac{\pi}{3}$.

15. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ και τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases} f(2x), & x\le 0 \\ 4f(x), & x>0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(0)=f(0)=0$ **ii)** $f'(0)=g'(0)=0$.

18. Έστω συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια, ώστε:

Σελ. 357

- $f(1)=f(2)=0$
- $f'(1)>0$
- $f'(2)>0$. Να αποδείξετε ότι: **i)** $f(x)>0$ κοντά στο 1

ii) $f(x)<0$ κοντά στο 2 **iii)** υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

19. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ η οποία είναι συνεχής και τέτοια ώστε

$$f'(\alpha)>0 \quad \text{και} \quad f'(\beta)<0.$$

Να αποδείξετε ότι: **i)** $f(x)>f(\alpha)$ κοντά στο α **ii)** $f(x)>f(\beta)$ κοντά στο β

iii) η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο σε κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

23. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και τέτοια, ώστε

$$x^2f(x)\le \eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x) \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. **ii)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

28. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Αν επιπλέον ισχύει $f(0)\neq 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

30. Έστω συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. **Σελ. 372**

29. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4.$$

Να αποδείξετε ότι: **i)** $f(0)=0$ **ii)** $f'(0)=4$ **iii)** $f'(x)=2x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

32. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(0)=f(1)$ και

$$\left|f'(x)-\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<(x-y)^2 \quad \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \text{ με } x\neq y.$$

Να αποδείξετε ότι: **i)** η συνάρτηση f' είναι συνεχής **ii)** $|f'(0)|<1$ **iii)** $|f'(1)|<1$

iv) η εξίσωση $f'(x)=x^2+x-1$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

5. Να βρεθούν τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $3P(x)=2\cdot(P'(x))^2$ β) $P(x)=(P'(x))^2\cdot P''(x)$ γ) $(P'(x))^3=(P(x))^2$.

6. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β και γ, για τους οποίους οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \text{και} \quad g(x)=x^2-2x+3$$

έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_1=-1$, ενώ στα σημεία τους με τετμημένη $x_2=3$ έχουν παράλληλες εφαπτόμενες.

7. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ και $g(x)=\frac{x^2+x-1}{2x}$ έχουν κοινή εφαπτομένη σ' ένα κοινό τους σημείο, ενώ στο άλλο κοινό τους σημείο έχουν κάθετες εφαπτόμενες.

9. Να αποδειχθεί ότι το τμήμα της εφαπτομένης της υπερβολής $y=\frac{\alpha}{x}$ στο οποιοδήποτε σημείο της, το οποίο περιέχεται μεταξύ των αξόνων, διχοτομείται από το σημείο επαφής.