

• Ασκήσεις

1. Αν $f(x) = 3x - 2$ και $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, να βρεθούν οι συναρτήσεις
α) $f \circ g$, β) $g \circ f$, γ) $f \circ f$ και δ) $g \circ g$.
2. Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [-1, 2]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων
α) $g(x) = f(2x - 1)$, β) $h(x) = f(x^2 - 1)$ και γ) $\varphi(x) = f(\sqrt{x}) - 3f(\ln x)$.
3. Δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(g \circ f)(x) = x^2 - x$.
α) Αν $g(x) = 3 - 5x$, να βρεθεί η $f(x)$.
β) Αν $f(x) = 2x - 5$, να βρεθεί η $g(x)$.
4. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f \circ g)(x) = \frac{x^4}{x^4 + 1}$ και $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, τότε
α) να βρεθεί η $f(x)$ και β) να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
5. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(g \circ f)(x) = x - 1$ και $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$, τότε να βρεθούν οι συναρτήσεις f και $f \circ f$.
6. Να επαληθεύσετε την προεταίρισιμη ιδιότητα
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

για τις συναρτήσεις $h: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow \Gamma$ και $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$.
7. Να βρεθεί η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις.
α) $2f(x) - f(-x) = \sin 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β) $3f(x) - 2f(1-x) = 5x^3 - 6x^2 + 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
γ) $f(x) - 2f(-x) = \frac{3}{2}(e^x - e^{-x})$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Στη συνέχεια, να βρεθεί το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης.
8. Αν $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ και $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$, να αποδειχθεί ότι η σύνθεση της f με την g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι ταυτοτική συνάρτηση.
9. Αν $f^3(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ f$.
10. Αν $f(x) = 2 - |x|$, $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ f$ και να γίνει η γραφική της παράσταση.
Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f \circ f$, καθώς και το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(f(x)) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

11. Αν $f(x) = \frac{\alpha x}{x-2}$, να βρεθεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f \circ f$ να είναι ταυτοτική στο σύνολο $\mathbb{R} - \{2\}$.

12. Αν $f(x) = \alpha x + 1$ και $g(x) = \frac{\beta x}{x^2 + 1}$, να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $g \circ f = f \circ g$.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - e^{-x}$ και $g(x) = \ln|x|$.

α) Να βρεθεί το σύνολο τιμών των f και g .

β) Να βρεθεί το διάστημα, στο οποίο η f θρίσκεται κάτω από τον x .

γ) Να βρεθούν τα διαστήματα, στα οποία η g θρίσκεται πάνω από τον x .

δ) Να βρεθεί η συνάρτηση $f \circ g$.

15. Να βρεθεί η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ που επαληθεύει την ιδιότητα $x f(x) + 2 f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$.

Συνάρτηση 1-1

1. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω είναι συναρτήσεις 1-1.

α) $f(x) = 2x^3 - 3$ β) $f(x) = 1 - 2x^2, x < 0$ γ) $f(x) = x^2 - 2x + 2, x \geq 1$

δ) $f(x) = \ln x + x^2$ ε) $f(x) = e^{1-x} \ln x$ στ) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι 1-1.

α) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ β) $f(x) = \eta \mu x + \epsilon \upsilon \nu x$ γ) $f(x) = x^5 - x^4 + 2$ δ) $f(x) = |x-1| + |x+1|$.

3. Να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι εξισώσεις

α) $\eta \mu^5 x - \epsilon \upsilon \nu^5 x = 3(\epsilon \upsilon \nu x - \eta \mu x)$, β) $x^9 + 2x^3 = 8x^3 + 4x$ και

γ) $e^{2x-1} - \frac{1}{e^x} = 3(1-3x)$.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και η $f \circ f$ είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και η f είναι 1-1.

5. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, να αποδειχθεί ότι και η συνάρτηση $g(x) = f^3(x) + 2f(x)$ είναι 1-1.

6. α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(g \circ g)(x) = e^x + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η g είναι 1-1.

γ) Να βρεθεί συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $h^3(x) + e^{h(x)} = x + \ln^3 x$ για κάθε $x > 0$.

7. Να λυθεί στο διάστημα $(-\infty, 0)$ η εξίσωση $e^x - e^{\frac{2}{x}} = \frac{x^3}{8}(8x^6 - 1)$.