ΘΕΤ------------------

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με
$$f(x_0) = \frac{3f(\alpha) + 5f(\beta)}{8}.$$

2. Αν μια συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ με
$$f(x_0) = \frac{1}{5}\left[f(0) + f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{3}\right) + f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f(1)\right].$$

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και οι τιμές της είναι ακέραιοι αριθμοί, να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

4. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που επαληθεύουν την εξίσωση $f^3(x) - 3f(x) + 2 = 0$.

5. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ και $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$, αποδείξτε ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

6. Έστω συνεχής και περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$. Να αποδειχθεί ότι η f παίρνει οποιαδήποτε τιμή του διαστήματος $[-3, 3]$.

7. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και το σύνολο $f(\Delta)$ έχει πεπερασμένου πλήθους στοιχεία, να αποδειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο Δ.

ΘΜΕΤ---------------

1. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(0) = \pi$ και $f(1) = e$, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = 2 + |f(x) - 3|$ έχει ελάχιστο.

2. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, e^2)$ και $B(-1, \frac{1}{e})$.
Να αποδειχθεί ότι:
α) Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - 2f(x) + 3$ έχει ελάχιστο.
β) Η συνάρτηση $h(x) = 4f(x) - 2f^2(x)$ έχει μέγιστο.
γ) Η συνάρτηση $\varphi(x) = 2 - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} f(x)\right)$ έχει ελάχιστο και μέγιστο.

3. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3}$.

4. Μια συνάρτηση $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ είναι συνεχής και για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) < x$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $f(0) = 0$.

β) Για κάθε $\alpha, \beta > 0$, με $\alpha < \beta$, υπάρχει $M \in [0, 1]$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ να ισχύει $f(x) \leq Mx$.

Επίσης, να αποδειχθεί ότι στο $[\alpha, \beta]$ η C_f βρίσκεται μεταβάλλεται μεταξύ δύο ευθειών που περνούν από την αρχή των αξόνων και έχουν κλίση μικρότερη του 1.

ΣΥΝΟΛΟΤΙΜΩΝ----------------------

2. α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

β) Να αποδειχθεί ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδειχθεί ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού έχει σύνολο τιμών της μορφής $[\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \alpha]$.

3. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x^\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

4. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ----------------------

7. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

8. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με
$$f^2(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} + 6.$$

10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $3f^3(x) + 4f(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδειχθεί ότι:

α) Η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Η f^{-1} ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η f^{-1}.

γ) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

δ) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{|f(x) - 2| - 2}{|1 - f^3(x)| - 1} = +\infty$.　　ε) $f \uparrow \mathbb{R}$.

Σ-Λ------------------

β) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε ισχύει
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0).$$

γ) Αν η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0, τότε ισχύει
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ και } \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$