1. α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$|\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta| \leq |\alpha - \beta|.$$
β) Να βρεθεί το όριο
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\eta\mu\sqrt{x+1} - \eta\mu\sqrt{x}\right).$$

2. Να αποδειχθεί ότι:

α) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

β) Η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\nu}$ έχει όριο το $+\infty$.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σημεία $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_1) + f'(x_2) = 2 \cdot \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

4. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ με $f(\alpha) + f(\delta) = f(\beta) + f(\gamma)$ και $\alpha + \delta = \beta + \gamma$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f''(x_0) = 0$.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχει σημείο $\gamma \in (\alpha, \beta)$ με $f(\gamma) > 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f''(\xi) < 0$.
Επιπλέον, αν η f'' είναι συνεχής, να αποδειχθεί ότι υπάρχει διάστημα $\Delta \subseteq [\alpha, \beta]$, στο οποίο ισχύει $f''(x) < 0$.

6. Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 5^x = 6^x + 2^x$.

7. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι αντιστρέψιμη, να αποδειχθεί ότι κάθε εφαπτομένη της C_f έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τη C_f.

8. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, να αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει
$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$
Ανισότητα Jensen

9. Αν $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι:
$$\frac{\beta - \alpha}{\eta\mu^2\beta} < \sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta < \frac{\beta - \alpha}{\eta\mu^2\alpha}.$$

10. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$.

α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = \alpha + \beta - x_0$.

β) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f με αντίστροφες κλίσεις.

Σταθερή συνάρτηση

1. Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(x-2)f'(x) = 2x^2-5x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $2f'(x)+3xf(x)=5x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

3. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, $f(x)>0$ και $f'(x)=f(x)\cdot \ln f(x)$.

4. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=0$, $f'(0)=1$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει
α) $(f(x))^2+(f'(x))^2=1$ και β) $f(x)=\eta\mu x$.

5. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(x-1)\cdot f'(x)=x^3-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. Δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμες με $f'''(x)=g'''(x)$, $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$ και $f''(0)\neq g''(0)$.
Να αποδειχθεί ότι:
α) Υπάρχει σταθερά $\alpha\neq 0$ με $f(x)=g(x)+\alpha x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
β) Οι C_f, C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

7. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$ και $f'(x)+xf(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=\sqrt{e-1}$ και $f'(x)\cdot f(x) - xf^2(x) = x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

10. Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f'(x)=\frac{x-1}{x}\cdot f(x)$ για κάθε $x>0$.

11. Δύο συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες με $f(0)=1$, $g(0)=-1$, $f'(x)=g(x)\neq 0$ και $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x)=f^2(x)-g^2(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$
β) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f και g.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)\neq 0$, παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=2$ και $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
γ) Να βρεθεί η συνάρτηση f.

13. Να βρεθεί συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με $f(x)>0$, $f(2)=e$, $f'(0)=0$ και $f''(x)-2xf'(x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.