

Σταθερή συνάρτηση & μονοτονία

1. Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με  $f(0) = c_1$ ,  $f'(0) = c_2$  και  $f''(x) = -f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Να αποδειχθεί ότι:

- α) Η συνάρτηση  $h(x) = (f(x))^2 + (f'(x))^2$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ .  
 β) Για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$  ισχύει  

$$(f(a))^2 - (f(b))^2 = (f'(b))^2 - (f'(a))^2.$$
  
 γ)  $f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις.  
 α)  $f(x) = x - \ln x$  β)  $f(x) = x - \ln x$  γ)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$  δ)  $f(x) = x^x$ ,  $x > 0$

3. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις

α)  $f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|}$  και β)  $f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x^2, & x < 2 \\ -x^2 + 6x + 8, & x \geq 2 \end{cases}$

4. Αν  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$  με  $\alpha > \beta$ , να αποδειχθεί ότι  $\frac{\eta \mu^2 \alpha}{\eta \mu^2 \beta} > \frac{\sigma \upsilon \nu \alpha}{\sigma \upsilon \nu \beta}$ .

5. Να λυθεί η εξίσωση  $3x^4 + x + 2 \ln x = 4$ .

6. α) Να βρεθούν οι τιμές του  $a \in \mathbb{R}^*$ , για τις οποίες η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^{ax}}{x^2 + a^2}$  είναι i) γνησίως αύξουσα και ii) γνησίως

φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

- β) Να αποδειχθούν οι συνεκταγμένες

i)  $x > 0 \Rightarrow e^x > x^2 + 1$  ii)  $x < 0 \Rightarrow e^x < x^2 + 1$

7. Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f(x) = e^x$  και  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ .

8. Να βρεθούν το σύνολο τιμών και οι ρίζες της συνάρτησης  $f(x) = e^x - e^{-x} + 2 \ln x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

9. Αν  $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$ , να λυθεί η εξίσωση  $f(1) + f(x^2) = f(x) + f(x^3)$ .

10. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

α)  $x + \ln x = 1$  β)  $x + \sin x = 1$  γ)  $e^x + \ln(x+1) = 1$  δ)  $(x+1)^{206} = 1 + x^{206}$

11. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^7 + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η συνάρτηση  $f^{-1}$  στο  $\mathbb{R}$ .

- β) Να βρεθούν οι αριθμοί  $f^{-1}(0)$  και  $(f^{-1})'(0)$ .

- γ) Να λυθεί η ανίσωση  $f^{-1}(2x) < x$

- δ) Να λυθεί η εξίσωση  $\eta^7 x + \eta x = x^7 + x$ .

12. Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $x \geq 0$  ισχύει

α)  $\sin x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$  και β)  $\eta \mu x \geq x - \frac{1}{6}x^3$ .

13. α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ,  $x > 0$ .

β) Αν  $a > b > e$ , να αποδειχθεί ότι  $a^b < b^a$ .

γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί  $e^n$  και  $n^e$ , καθώς και αριθμοί  $\sqrt[n]{n}$  και  $\sqrt[n+1]{n+1}$  με  $n \geq 3$ .

14. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

15. α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ .

β) Να λυθεί η εξίσωση  $(4x-2)\ln x = (x^2-1)\ln 2x$ ,  $x > 1$ .

16. Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$ .

17. α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $e^x + e^{-x} \geq x^2 + 2$ .

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $x + \frac{1}{x} \geq \ln^2 x + 2$ .

γ) Να λυθεί η εξίσωση  $\frac{(x-1)^2}{x} = \ln^2 x$ .

18. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και τέτοιες, ώστε  $f(g(x)) = 1 - \ln x$  για κάθε  $x > 0$  και  $f'(g(x)) = x$  για κάθε  $x > 0$ .

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς τη μονοτονία.

ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση  $g(1) = 1$ , να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

19. Έστω συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$f'(x) > \frac{1}{x \ln x}$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ . Να αποδείξετε ότι  $f(3) - f(e) > \ln(\ln 3)$ .

20. Έστω συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε  $f(0) = 0$ .

Αν η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:

i)  $xf'(x) - f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$

ii) η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$  είναι γνησίως αύξουσα

21. Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε  $f'(1) = f(1) + f(0)$  και  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιος, ώστε  $f'(\xi) = f(1) - f(0)$  ii)  $f(0) > 0$

iii) υπάρχει εφαπτομένη της  $C_f$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

22. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης  $x^3 - 6x^2 + 9x + a = 0$ , για τις διάφορες τιμές του πραγματικού  $a$

23. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες: α)  $\ln x > \frac{x-1}{x} + \frac{1}{2} \left( \frac{x-1}{x} \right)^2$  για κάθε  $x > 1$

β)  $4 \ln x < \left( 1 + \frac{x}{e} \right)^2$  για κάθε  $x > e$

24. Έστω συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε

$f(1) = 2$  και  $f(f(x)) = x$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση  $f$  δεν έχει τοπικά ακρότατα

ii) αν επιπλέον η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής, τότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

25. Αν ισχύει η σχέση

$$x^3 \geq x^2 + a \ln x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

όπου  $a$  σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:  $a = 1$ .