1. **Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy$ για κάθε $x, y\in$**
i) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$ ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

2. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $2f(x)\leq f(1)+f(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι: **i)** $f(1)=f(2)$ **ii)** η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο
iii) αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

3. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x, & x<0\\ x-2\sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}.$$

4. Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και υπάρχουν σημεία $x_1, x_2\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_1)<f(\alpha)<f(\beta)<f(x_2)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν σημεία $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

5. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$.
α) Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο α, να αποδειχθεί ότι $f'(\alpha)\geq 0$, ενώ αν παρουσιάζει ελάχιστο στο β, να αποδειχθεί ότι $f'(\beta)\leq 0$.
β) Διατυπώστε ανάλογη πρόταση για μέγιστο.
γ) Αν $f'(\alpha)<0<f'(\beta)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)=0$.
δ) Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$.
ε) Αν $f'(\alpha)\neq f'(\beta)$, να αποδειχθεί ότι η f' παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των τιμών $f'(\alpha)$ και $f'(\beta)$.

6. Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(x)=(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)f'(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδειχθεί ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2-3x+2$, $x>0$.
α) Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία 1 και 2.
β) Αν $\alpha=2$ και $\beta=\frac{1}{2}$, να βρεθούν
i) το σύνολο τιμών της f και
ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

8. α) Αν $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\alpha+\beta=1$, να αποδειχθεί ότι $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\geq\frac{1}{2}$.
β) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $(\eta\mu^2x)^{\eta\mu^2x}\cdot(\sigma\upsilon\nu^2x)^{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{2}$.

9. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\ln(f^2(x)+1)+e^{f(x)}=(x-2)e^x+2x+1.$$

Να αποδειχθεί ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

1. Απ' όλα τα ισοσκελή τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο (O, R), να βρεθεί εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

2. Απ' όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή περίμετρο, να βρεθεί εκείνο που έχει ελάχιστη υποτείνουσα.

3. Ένα σχολείο έχει 360 μαθητές και πρόκειται να κάνει ημερήσια εκδρομή, στην οποία θα πρέπει να συμμετάσχουν τουλάχιστον τα $\frac{2}{3}$ των μαθητών. Αν δηλώσει συμμετοχή ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που απαιτείται, τότε το κόστος για κάθε μαθητή είναι 36 €. Για κάθε επιπλέον μαθητή το κόστος ελαττώνεται κατά 0,1 € ανά μαθητή.
Πόσοι μαθητές πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε το πρακτορείο ταξιδίων να έχει α) μέγιστα έσοδα και β) ελάχιστα έσοδα;

4. Ένας βαρκάρης βρίσκεται στη θάλασσα και απέχει 3 Km από το κοντινότερο σημείο Α μιας ευθύγραμμης ακτής. Ενδιαφέρεται να φτάσει, στον ελάχιστο δυνατό χρόνο, σε σημείο Γ της ακτής που απέχει 4 Km από το σημείο Α. Σε ποιο σημείο της ακτής πρέπει να αποβιβαστεί, αν είναι γνωστό ότι η ταχύτητα της βάρκας είναι 3 Km/h, ενώ η ταχύτητα του βαρκάρη στην ακτή είναι 5 Km/h;

5. Απ' όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με το ίδιο εμβαδόν, να βρεθεί εκείνο που έχει ελάχιστη υποτείνουσα.

6. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει περίμετρο α (σταθερή). Αν x είναι μια οξεία γωνία του, να αποδειχθεί ότι η υποτείνουσα του τριγώνου
α) ισούται με $y = \dfrac{\alpha}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$ και

β) γίνεται ελάχιστη, όταν το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

7. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει περίμετρο α (σταθερή). Αν x είναι μια οξεία γωνία του, να αποδειχθεί ότι η υποτείνουσα του τριγώνου
α) ισούται με $y = \dfrac{\alpha}{1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$ και

β) γίνεται ελάχιστη, όταν το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

8. Σε κύκλο ακτίνας ρ, να εγγραφεί ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν.

9. Απ' όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή υποτείνουσα, να βρεθεί αυτό που έχει τη μεγαλύτερη περίμετρο.

10. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ = 10 και ύψος ΑΔ = 5. Να εγγραφεί στο τρίγωνο, ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν.

11. Σε τετράγωνο πλευράς α, να εγγραφεί άλλο τετράγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

12. Ένα ορθογώνιο φύλλο χαρτιού έχει εμβαδόν 600 cm^2. Τα περιθώρια πάνω και κάτω είναι 4 cm, ενώ δεξιά και αριστερά είναι 3 cm. Να βρεθούν οι διαστάσεις του φύλλου, για τις οποίες η ωφέλιμη επιφάνειά του είναι μέγιστη.

13. Δύο ευθύγραμμοι δρόμοι Ox και Oy διασταυρώνονται κάθετα στο σημείο O. Ένα αυτοκίνητο A βρίσκεται στο δρόμο Ox σε απόσταση 300 km από το O και κινείται προς το O. Ένα άλλο αυτοκίνητο B βρίσκεται στο O και κινείται στο δρόμο Oy. Οι ταχύτητες των A και B είναι 60 km/h και 80 km/h αντίστοιχα.

α) Ύστερα από πόσο χρόνο η απόσταση των δύο αυτοκινήτων γίνεται ελάχιστη;

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των δύο αυτοκινήτων ύστερα από 2 ώρες από την εκκίνησή τους;

14. Το κόστος των καυσίμων ενός τρένου, για κάθε ώρα, είναι ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητάς του. Όταν το τρένο κινείται με ταχύτητα 40 km/h, το κόστος των καυσίμων είναι 64 € την ώρα. Τα υπόλοιπα έξοδα, ανεξάρτητα από την ταχύτητα, είναι 81 € την ώρα. Να βρεθεί η ταχύτητα του τρένου, για την οποία το συνολικό κόστος, για κάθε χιλιόμετρο, να είναι ελάχιστο.

15 Ένα πλοίο καταναλώνει για καύσιμα $2+0{,}001\cdot v^3$ τόνους την ώρα, όπου v η ταχύτητά του. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται, ώστε να έχει ελάχιστη κατανάλωση καυσίμων για ένα ταξίδι 1000 μιλίων;

16. Αν ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει επιφάνεια ίση με 12 dm^2, ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός όγκος του;

17. Ένα ορθογώνιο έχει τη βάση του στον άξονα x'x και τις επάνω κορυφές του επί της παραβολής $y=-x^2+6$. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν και η μέγιστη περίμετρος του ορθογωνίου.

18. Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 60 cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα επάνω οι πλευρές. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.