

1. Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f στις ακόλουθες περιπτώσεις.

α) $f'(x) = 3 \eta \mu 2x - 2 \sigma \upsilon \nu \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \frac{3}{2}$.

β) $f'(x) = \epsilon \varphi^2 x + \sigma \varphi^2 x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $f(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2}$.

γ) $f'(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$, $x \in (-\infty, -1)$ και $f(-2) = \frac{\ln 7}{3}$.

δ) $f'(x) = \frac{5}{3x(\ln x + 2)}$, $x \in (e^{-2}, +\infty)$ και $f(\frac{1}{e}) = 1$.

ε) $f'(x) = \epsilon \varphi x - \sigma \varphi \frac{x}{2}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $f(\frac{\pi}{3}) = 3 \ln 2$.

ςτ) $f'(x) = \frac{1}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

ζ) $f'(x) = \frac{1}{x^2+x}$, $x \in (-\infty, -1)$ και $f(-2) = \ln 2$.

2. Να βρεθούν οι παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

β) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2}}$

γ) $f(x) = \frac{x}{x - \sqrt{x^2+1}}$

δ) $f(x) = \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1}$

ε) $f(x) = \frac{4^x + 1}{2^x + 1}$

ςζ) $f(x) = e^{x+e^x}$

ζ) $f(x) = e^{x^2 \ln x}$

η) $f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 2x^3 + 1}$

θ) $f(x) = \eta \mu 2x \cdot \eta \rho x$

ι) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x \sqrt{\ln x}}$

ια) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}$

ιβ) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

3. Ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού $N(t)$ μιας κοινωνίας βακτηριδίων, τη χρονική στιγμή t , είναι $15 \cdot e^{\frac{3}{2}t}$ χιλιάδες ανά λεπτό. Να βρεθεί ο πληθυσμός $N(t)$, αν γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ ο πληθυσμός είναι 10^6 βακτηρίδια.

4. Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής $K(t)$ ενός προϊόντος είναι $1000 - 3t$ χιλιάδες ευρώ το μήνα, ενώ ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων $E(t)$ στο τέλος των t μηνών είναι $1500 + 2t$ χιλιάδες ευρώ το μήνα.

Να βρεθεί το κέρδος από το 2ο έως και τον 5ο μήνα παραγωγής.

4. α) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί a και b , για τους οποίους ισχύει $\frac{3x-2}{x^2+2x-3} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

β) Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-3, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(x) = \frac{3x-2}{x^2+2x-3}$.

5. Αιτιολογήστε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ με $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ ή $\int_a^b |f(x)| dx = 0$, τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ με $\int_a^b f(x) dx = 0$ και υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ με $f(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

6. Αν $I_v = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, να αποδειχθεί ότι $I_v > I_{v-1}$ για κάθε $v \geq 2$.

7. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^3}}$ και να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_{t^3}^{t^3+5t^2} f(x) dx \right) = 0.$$

8. Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και ισχύει $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, να αποδειχθεί ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

9. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $\int_0^1 (f^2(x) - 2f(x) + 1) dx = 0$ β) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} + \int_0^1 f^2(x) dx$

γ) $\int_0^1 f^4(x) dx = -1 + 2 \int_0^1 f^2(x) dx$ δ) $\int_0^1 f^4(x) dx + \int_0^1 f^2(x) dx = 2 \int_0^1 f^3(x) dx$

ε) $\int_0^1 f^4(x) dx = \int_0^1 f^3(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx$.

10. Θεωρούμε δύο συνεχείς συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[a, b]$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda^2 \cdot \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \cdot \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0.$$

Να εξετασθεί τότε ισχύει η ισότητα.

β) Να αποδειχθεί η ανισότητα Schwarz

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$