1. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε να ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha x+1, & -1 \le x \le 0 \\ x^3+\beta x^2+2x+\gamma, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

και μετά να βρεθεί σημείο $x_0 \in (-1,1)$ με $f'(x_0)=0$.

2. Πόσες οριζόντιες εφαπτόμενες έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot\ldots\cdot(x-\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$;

3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.
α) Είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
β) Είναι συνεχής, ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$ και η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.
γ) Είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, $f(\alpha)=f(\beta)$ και η

4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της παραγώγου των συναρτήσεων
α) $f(x)=(x^2-4)\cdot(x-x^3)$ και β) $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2$, όπου $\alpha<\beta<\gamma$.

5. Να αποδειχθεί ότι κάθε εξίσωση της μορφής $x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta=0$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}^*$, έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα, αλλά το πολύ τρείς.

6. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3-9x^2-2x+9=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

7. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\alpha>0$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Να δοθεί γεωμετρική ερμηνεία.

8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2+2\sigma\upsilon\nu x=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

9. α) Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο Δ.
β) Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x+e^{-x}$ και $g(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-2$ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

10. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία, τα οποία έχουν τετμημένες $x_1\in(-\pi,0)$ και $x_2\in(0,\pi)$.

11. Αν η εξίσωση $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, με $\alpha\neq 0$, έχει τέσσερις άνισες ρίζες, να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

12. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f(0)-f(2)=2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(0,2)$ με $f'(\xi)=1-2\xi$.

13. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=2\xi\cdot\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^2-\alpha^2}$.

14. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Αν c είναι ένας σταθερός αριθμός, με $c<\alpha$ ή $c>\beta$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(c,0)$.

15. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)+\mu f(x_0)=0$, για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

16. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$2x^5-5x^4+20x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\quad,\ \text{με } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

έχει 1 ή 2 ή 3 πραγματικές ρίζες.

17. Δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(\alpha)=g(\beta)=0$, $\alpha>0$ και $f(x)\cdot g(x)\neq 0$.
Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}+\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)}=\dfrac{1}{x_0}$.

18. Μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η C_f έχει τρία κοινά σημεία με την ευθεία $y=x$.
Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x\cdot f'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον θετικές ρίζες.

19. Έστω συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε
$2f^2(x)+1<3f(x)$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $f'(x)\neq\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\frac{1}{2}x_0$.

20. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f(0)=f'(0)=0$. Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει τύπο

$$g(x)=(1-x)f(x)\ \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι: **i)** οι συναρτήσεις g και g' δεν είναι $1-1$

ii) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $(1-\xi)f''(\xi)=2f'(\xi)$.