

Ιδιότητα & Πράξεις συναρτήσεων.

1) Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίδες οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 5\lambda - \lambda^2} \quad \text{και} \quad g(x) = x - \frac{5x}{x + 6}.$$

2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$, $g(x) = |x - 1|$ και $h(x) = \frac{1}{2}x$. α) Να εξετάσετε αν $f = g$

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h .

3) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -2 < x \leq 1 \\ 3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2x+1, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Να ορίσετε τη συνάρτηση $f+g$ και να κάνετε τη γραφική της παράσταση. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f+g$.

4) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f+g$.

β) Δίνεται, ακόμα, η συνάρτηση $w(x) = \frac{2x+4}{x-4}$, $x \neq 4$.

Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $w(x) = h(x)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $|h(x)| = \frac{3}{2}$

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$\varphi(x) = \frac{1}{h(x)-2}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονοτονία - Ακρότατα.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$, $x > 0$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{x^3} + \sqrt{x} > \sqrt{x^3} + \frac{1}{x}$

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

ii) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln x < x$

7) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{10x}{x^2+25}$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = |x-5|+1$

Να δείξετε ότι:

i) Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=5$

ii) Η g $\gg$ ελάχιστο

iii) Οι C_f , C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

8) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f^2(x) - 2xf(x) + x^2 + 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i) $g(x) \geq 7 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ii) αν η ευθεία $y=x$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο, τότε η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο.

9) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι: i) $f(0)=0$, ii) $x \cdot f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

10) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως αύξουσα

συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(2^x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

11) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις

συναρτήσεις: α) $f(x) = \frac{x}{x+4}$ και β) $g(x) = \frac{3x-2}{x-1}$