1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κοίλη και τέτοια, ώστε $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει μοναδικός $\xi\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi)=0$

ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση ξ

iii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f'(1)=1$, τότε $f(\xi)<1$.

iv) Αν επιπλέον f΄(2)=-1, τότε να δείξετε ότι f(ξ)<1/2.

2. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, κοίλη και τέτοια, ώστε $f(1)=f(0)+1$ και $f'\left(\frac{1}{2}\right)<1$. Να αποδείξετε ότι: **i)** υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=1$

ii) η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(x)-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι κοίλη

iii) η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και τέτοια, ώστε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(e^x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι επίσης κυρτή.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\ln x\geq 1-\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

iv) Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει η σχέση $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 3$.

5. **Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $e^{f(x)}+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f'(2x)=f(x)-f'(x)$.

6. **Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα, κυρτή και τέτοια, ώστε $f(1)+f(3)=0$.**

Να αποδείξετε ότι i) $f(2)<0$ ii) υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

7. **Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{x+e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,f(0))$.

iii) Να αποδείξετε ότι $e^{e^x+x-1}\geq 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x+4)-f(2x+3)<f(x+1)-f(x)$.

8. **Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε**

$$\alpha\ln x\leq f(x)\leq x-1 \quad \text{για κάθε} \quad x\in(0,+\infty)$$

και $f''(x)\neq 0$ **για κάθε** $x\in(0,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι: i) $\alpha=1$ ii) η συνάρτηση f είναι κοίλη.

1. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^x$, $x\in(0,+\infty)$.**
i) Να βρείτε τη συνάρτηση f'. ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{\ln x}=1$.
iii) Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. **Να αποδείξετε ότι: i) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}=e^2$.**

3. **Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$, μη σταθερή και τέτοια, ώστε $f(x+y)=e^{2xy}\cdot f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.**
Να αποδείξετε ότι: i) $f(0)=1$ ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
iii) $f(x)=e^{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4. **Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.**
Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

i) $\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)\right]=0$ ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}=f''(x)$

iii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}=f''(x)$.

5. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=1$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Ασύμπτωτες-----------------------------

6. **Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha x^2+\beta x+2}{x-1}-x+2\right)=0$.**

7. **Αν η ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, να αποδείξετε ότι:**

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^2(x)-5xf(x)}{x}=-\infty$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)+x^2+1}{x^2f(x)-3x^3+2x^2}=\dfrac{4}{7}$.

8. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^3(x)+x^3=-6xf(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.
Αν η γραφική παράσταση της συνάρτηση f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$, να αποδείξετε ότι η ασύμπτωτη αυτή είναι η ευθεία $\varepsilon: y=-x+2$.

9. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-\ln x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(e^x-1))$ γ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

10. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+1}}-e^x\right)=+\infty$.

11. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x-\eta\mu x|}}{x}=0$ β) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{\eta\mu x-x}}{x}=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\right)=0$ δ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi 2x}\right)=+\infty$

ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot e^{\frac{1}{\eta\mu x}}\right)=+\infty$ στ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{\eta\mu x}}\right)=+\infty$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)\right)=1$ η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu\sqrt{x+1}-\sigma\upsilon\nu\sqrt{x-1}\right)=0$.